Aprender a enseñar...

MATEMÁTICAS

Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez
Adela Guerrero Reyes
Fortino Escareño Soberanes
Silvia García Peña
José Luis Córdova Frunz

APRENDER A ENSEÑAR MATEMÁTICAS

Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez
Adela Guerrero Reyes
Fortino Escareño Soberanes
Silvia García Peña
José Luis Córdova Frunz

Coordinadores. Adela Guerrero Reyes, Ismael Vidales Delgado
Autores. Irma Rosa Fuenlabrada Velásquez, Adela Guerrero Reyes, Fortino Escareño Soberanes, Silvia García Peña, José Luis Córdova Frunz
Realización de versión electrónica. José Jesús de León Rodríguez

Aprender a enseñar Matemáticas

Impreso en Monterrey N.L.

Primera edición: noviembre de 2005

El Centro de Altos Estudios e Investigación Pedagógica es un proyecto orientado a la formación de recursos humanos para la investigación educativa con enfoque formativo y asistencia de expertos, inició en agosto de 2004 en el Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Nuevo León (COCyTE, NL) y desde mayo de 2005 es administrado por el Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Nuevo León.

Colección. Altos Estudios No. 2

Índice

Prólogo

Maestras y Maestros de Nuevo León

La serie *"Aprender a enseñar . . ."* que ahora ponemos en sus manos es resultado del esfuerzo compartido entre el Proyecto *Centro de Altos Estudios e Investigación Pedagógica* y un grupo de docentes e investigadores en el quehacer educativo, cuya experiencia queremos compartir con las maestras y maestros de educación primaria.

El interés que nos anima es ofrecer a los docentes de Nuevo León, distintas aproximaciones teóricas, metodológicas y didácticas sobre las Asignaturas que componen el Plan y los Programas de estudio de la educación primaria.

Los textos que se presentan son la expresión de un grupo de estudiosos, - docentes y autores de libros y materiales dirigidos a maestros -, preocupados por el trabajo cotidiano en el aula e interesados en proponer formas y estrategias para que los alumnos y las alumnas aprendan mejor y de forma significativa.

La serie *"Aprender a enseñar . . ."* no tiene como finalidad ser un sustituto de los materiales con los que cuenta el maestro, por el contrario, busca propiciar que a partir de la lectura de los diferentes puntos de vista de los autores, y – de ser posible – de la reflexión colectiva sobre ellos, el docente encuentre nuevas maneras de abordar algunos temas o la posibilidad de enriquecer sus estrategias para el desarrollo de los procesos de enseñanza – aprendizaje.

Quienes nos encontramos en las aulas, o hemos estado en ellas, sabemos de las dificultades que se viven todos los días para lograr que los alumnos alcancen los objetivos de aprendizaje propuestos, por ello, estamos convencidos de que requerimos de contar con elementos teóricos, metodológicos y prácticos, que nos lleven a procesos de autoformación, de análisis y discusión, de reflexión y cambio con vistas a lograr una educación básica de calidad y a la altura de los requerimientos actuales que la sociedad ha depositado en la escuela.

Los textos que integran la serie *"Aprender a enseñar . . ."* habrán cumplido sus propósitos no sólo cuando sean revisados de manera personal y comentados con los colegas, sino principalmente cuando lleguen a formar parte de la experiencia, pues ésta consiste no sólo en el número de cosas que se han visto o vivido, sino en el número de cosas que se han reflexionado y puesto en práctica.

Maestros y Maestras de Nuevo León, es a partir de esta perspectiva que los invitamos a leer los libros de la serie *"Aprender a enseñar . . ."* .

Ismael Vidales Delgado y Adela Guerrero Reyes
Coordinadores de la serie

Presentación

El libro “*Aprender a enseñar* Matemáticas” reúne las aportaciones de los siguientes cinco autores.

- "*A casi 13 años . . . y sigue la mata mática dando!" (Algunas reflexiones en torno a la enseñanza de la aritmética*), de Adela Guerrero Reyes, hace un recorrido teórico y metodológico en torno al proceso de enseñanza – aprendizaje de los números, sus relaciones y sus operaciones. A partir de ejemplos tomados de clases reales, la autora analiza en qué medida las concepciones docentes pueden apartarse del enfoque vigente, incorporando sugerencias y recomendaciones prácticas para el trabajo en el aula.

- *Los problemas, recurso metodológico en el que los números y sus relaciones encuentran significado*, desarrollado por Irma Fuenlabrada Velázquez, centra su atención en el análisis de dos enfoques aparentemente excluyentes: los problemas como punto de partida a través del cual el conocimiento matemático encuentra significado (vigente) y, el de enseñar “por competencias” (surgido recientemente), aportando elementos para la reflexión del docente en la perspectiva de que ambos están implicados en el proceso de aprendizaje.

- *El enfoque de resolución de problemas y la resolución de los problemas del Enfoque*, escrito por Silvia García Peña, aporta elementos para el análisis de los obstáculos y dificultades que enfrentan los docentes para trabajar con el enfoque de resolución de problemas en las clases de matemáticas. A partir de situaciones concretas, la autora identifica aquellas concepciones de los docentes que no han permitido modificar la práctica cotidiana, formulado recomendaciones y propuestas para el cambio.

- *Enseñar a resolver problemas aritméticos con ayuda de representaciones*, de Fortino Escareño Soberanes. A partir de preguntarse cuál es el papel de la resolución de problemas en el salón de clase y con qué estrategias didácticas debe trabajar el docente para lograrlo, el autor propone el uso sistemático de diversas representaciones que permitan al alumno a entender los problemas que se trabajan en el aula. Se parte de la premisa de que es más adecuado destinar más tiempo a trabajar pocos problemas, desde diversas perspectivas, que resolver muchos usando una misma estrategia.

- *Los números figurados*, de José Luis Córdova Frunz, es un texto que desde una perspectiva teórico – matemática, ofrece elementos para el conocimiento de los números, que si bien no se encuentran explícitamente planteados en el Plan y Programas de estudio vigente, tienen un gran potencial didáctico para hacer más provechoso y placentero el aprendizaje de la asignatura.

Maestro y Maestra de Nuevo León

Los invitamos a iniciar la aventura de leer este texto, confiamos en que el viaje despierte en usted nuevas inquietudes e interrogantes que lo lleven a nuevas búsquedas y a mejores prácticas.

A casi 13 años . . . y sigue la mata *mática* dando!
(Algunas reflexiones en torno a la enseñanza de la aritmética)

Adela Guerrero Reyes

Antes de abordar el tema que nos ocupa, relacionado con los procesos de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas, en tanto asignatura del currículo formal de la educación primaria, es conveniente advertir al posible lector acerca de que lo encontrará en el texto.

Estamos cumpliendo 13 años de trabajo con una propuesta curricular, que transformó de manera profunda nuestro hacer didáctico, que trastocó usos y costumbres y que nos planteó nuevos retos: una Reforma Integral de la educación básica, en particular de la educación primaria.

Podríamos pensar que después de tantos años, los docentes ya entendimos y aplicamos cabalmente los postulados esenciales de semejante cambio y que vamos con paso firme, logrando aprendizajes de calidad en nuestros alumnos.

Esa convicción que bien puede estar en el ánimo de todos y cada uno de nosotros, se ve perturbada por los informes y reportes que en torno a la calidad de la educación, encontramos de manera cotidiana.

En particular, para la asignatura de Matemáticas, observamos que las mediciones de la calidad e impacto de los aprendizajes logrados en nuestros alumnos no responden satisfactoriamente a estándares nacionales e internacionales.

Ante ello, los docentes nos planteamos un sin fin de interrogantes.

No es intención de este trabajo resolverlas, sino más bien analizar algunas de ellas y desde la perspectiva de quien escribe, identificar algunos aspectos relevantes y apuntar algunas recomendaciones para que los docentes, después de reflexionarlas y, - de ser posible comentarlas con sus colegas, - puedan tomar las decisiones que consideren convenientes para enriquecer su trabajo didáctico.

El propósito de este artículo es dejar planteadas interrogantes que muevan a la reflexión y a la búsqueda de alternativas, más que ofrecer respuestas.

Hecha esta aclaración, usted lector, decide si continua . . .

Las Matemáticas en la educación básica: ¿una asignatura o algo más?

La educación básica en tanto derecho de los mexicanos y obligación del Estado, es la propuesta educativa que de manera intencional contribuye a la formación integral de las nuevas generaciones.

En este sentido, la educación básica aspira a satisfacer las necesidades fundamentales de aprendizaje de los niños y las niñas, con el propósito de brindar aquellos elementos formativos que les permitirán vivir en sociedad y desarrollar habilidades para el aprendizaje permanente.

La educación primaria, es un tramo de esta educación básica, por lo que sus componentes curriculares deben contribuir a dichos propósitos formativos.

En el currículo de la educación básica, las Matemáticas tienen un espacio relevante, con propósitos y contenidos definidos, articulados y organizados institucionalmente.

Las Matemáticas como espacio curricular, en tanto asignatura de la educación primaria, juegan un papel fundamental en la formación integral de los niños y las niñas.

Esto, que si bien es ampliamente asumido por el docente, lleva a una serie de reflexiones al momento de planear nuestras acciones didácticas concretas para el trabajo con la asignatura de Matemáticas y que tienen que ver, entre otras con:

- ¿Cuáles son los propósitos fundamentales de la asignatura?
- ¿Qué es lo que deben aprender los alumnos?
- ¿Cómo organizar la enseñanza para que los alumnos construyan aprendizajes significativos y permanentes?

A lo largo de este texto, se propone que las respuestas a estas a estas interrogantes, deben trascender el marco de lo inmediato, de los objetivos particulares de la asignatura y grado, para plantearse en el contexto de una educación básica de calidad.

De ahí que, nuestra acción didáctica deberá guiarse para el logro de competencias, conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes y valores, - entre otros -, necesarios no sólo para el conocimiento particular de los contenidos de la asignatura de Matemáticas, sino para el desenvolvimiento de los educandos, y para que puedan aprender a lo largo de la vida.

¡Las Matemáticas escolares, son más que una asignatura!

Consideraciones preliminares por cuanto al currículo para el trabajo con la asignatura de Matemáticas.

El Plan y los programas de estudios contienen los lineamientos académicos generales para los seis grados de la educación primaria, de manera simple, podríamos decir que ofrecen elementos para responder a una pregunta fundamental: ¿qué queremos que nuestros alumnos conozcan y sepan hacer cuando terminen la primaria? y, ¿cómo puede contribuir cada profesor para lograr esos propósitos?

Estos documentos ofrecen una visión de conjunto acerca de los propósitos y contenidos del nivel y de cada grado; sin embargo ¿todos los docentes los interpretan de la misma manera?. La respuesta es no.

Veamos por qué.

Considerando que las Matemáticas son un componente fundamental del currículo de la educación básica, resulta fundamental tomar conciencia de que toda acción de enseñanza conlleva un acto intencional de aprendizaje.

De ahí que se hable de un proceso de enseñanza – aprendizaje cuya naturaleza implica el cómo y el para qué se enseña y se aprende, qué ideas, conceptos y nociones se tienen acerca del sujeto que aprende y de los contenidos a aprender. Una concepción de esta naturaleza implica que el docente asume, explícita o implícitamente, una toma de posición respecto de los componentes del proceso enseñanza – aprendizaje.

De ahí que, para la planeación y desarrollo de sus acciones didácticas, el profesor reformula y recrea los lineamientos normativos plasmados en los Programas.

Este proceso, lo lleva a tomar una serie de decisiones relacionadas, entre otras cosas con:

- El para qué o propósito intencionado del proceso enseñanza – aprendizaje, esto es: objetivos y contenidos.

- La metodología, la organización y los recursos didácticos a través de los cuales abordará los contenidos para el logro de los objetivos.

- La evaluación; es decir, la manera de hacer evidente al profesor, pero sobre todo a los alumnos que se logró el propósito.

Estas decisiones, reflejo de la experiencia personal e institucional, consciente o no, llevan al docente a proponer secuencias y estrategias didácticas propias.

La manera en que el docente planea y desarrolla sus acciones didácticas en el aula, da cuenta de sus concepciones y convicciones personales e institucionales en torno a qué es el conocimiento, qué es lo que se enseña y aprende en la asignatura y para qué se hace.

Por otra parte, habremos de decir que nuestras búsquedas de respuestas han apelado a diversas estrategias para llevar a cabo el proceso de enseñanza – aprendizaje de nuestros alumnos, algunas de ellas producto de nuestra experiencia, otras más, resultado de lecturas y materiales de apoyo consultados o de cursos de actualización.

Echemos una rápida mirada a algunas de ellas y vayamos reflexionando de manera conjunta, si se parecen en algo a lo que hacemos . . .

Distintas aproximaciones al proceso de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas

Un análisis somero de los materiales curriculares desarrollados en los últimos años y con las cuales más de alguno de nosotros hemos trabajado, nos permite identificar distintas aproximaciones y posturas en torno al proceso de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas.

La intención de referirlas ahora, no responde a un interés histórico descriptivo. Por el contrario, se considera necesario comentar brevemente tres de ellas, en virtud de que la observación de la práctica educativa lleva a pensar que coexisten actualmente, aun a pesar de que el enfoque vigente es distinto.

¡Veamos!

- Se aprende matemáticas a través de los ejercicios y la práctica

Como su nombre lo indica, esta corriente plantea que el alumno aprende en la medida que realiza múltiples y variadas ejercitaciones de un concepto o de una operación, en consecuencia las actividades de enseñanza se centran en la repetición de lo aprendido.

A manera de ejemplo, para el caso del aritmética (números y operaciones) se plantea que el niño deba ser capaz de realizar cálculos cada vez más complejos, en forma rápida y exacta y así, una vez que aprenden a utilizar en forma adecuada los procedimientos convencionales, - algoritmos -, podrán resolver problemas.

La postura actual, difiere de este planteamiento, ya que enseñar y aprender matemáticas implica la comprensión de los conceptos y de las relaciones, en el enfoque vigente, el énfasis se coloca en la construcción de significados y no en la eficiencia de respuestas automáticas para la solución de operaciones. Numerosos estudios en el campo educativo han demostrado que la repetición no lleva a la comprensión.

Habría que analizar nuestra práctica.

¿Cuántas veces hemos caído en la tentación de pedir a los alumnos que hagan "planas", o que resuelvan múltiples operaciones, como requisito para trabajar los contenidos del programa?

Lo anterior no implica desdeñar la ejercitación y la práctica, sino más bien replantearla, ubicarla en su justa dimensión y en el marco del enfoque actual.

Efectivamente se requiere que los alumnos automaticen, a través del aprendizaje, algunos procedimientos y algoritmos, asimismo también es cierto que la ejercitación contribuye a ello; sin embargo, es necesario reconocer que esta ejercitación debe acompañarse de significado y que no es prerrequisito para el planteamiento y la solución de problemas.

Si bien, el manejo de algoritmos es necesario y útil, éstos se construyen a partir de que los alumnos van descubriendo regularidades en su proceder, en la medida que al buscar soluciones a situaciones problemáticas, formulan hipótesis, echan mano de procedimientos no convencionales, analizan y discuten estrategias con otros compañeros, las ponen en juego y evalúan sus resultados. Y así, poco a poco emergen los procedimientos y estrategias convencionales (algoritmos) como resultado de la propia acción.

¿Ejercicios y práctica? Sí, pero con significado e intención.

- <u>Se aprende iniciando por lo sencillo y cotidiano, aumentando la complejidad hasta llegar a la formalización</u>

Esta corriente, comúnmente conocida como aprendizaje acumulativo a partir de jerarquías y transferencias, plantea que el aprendizaje de contenidos sencillos facilita y prepara el de otros semejantes más complejos; en consecuencia, se proponen estrategias de enseñanza para transitar de lo sencillo a lo complejo.

El aprendizaje de las matemáticas es concebido como relaciones de transferencia jerárquica.

¿Encontraremos algunos de los planteamientos de esta corriente, en nuestro hacer didáctico cotidiano?

Nuevamente tomemos de ejemplo el aprendizaje de los números y sus operaciones.

Se identifican y establecen secuencias didácticas detalladas, con un orden creciente de dificultad en sus contenidos: comparar colecciones de objetos por su cantidad, identificar "muchos, pocos, igual", aprender los números, contar objetos, hacer ejercicios de suma y de resta con cantidades de una o dos cifras sin reagrupación, con reagrupación y, finalmente resolver problemas.

Al igual que en la corriente anterior, el enfoque actual difiere de este planteamiento, entre otras cosas porque el aprendizaje no es la acumulación progresiva de conocimientos o habilidades; por el contrario, es un proceso constructivo de significados, resultado de interacciones constantes entre el sujeto que conoce y el mundo o realidad por conocer. En el que si bien, se avanza progresivamente, no es a partir de fragmentos de realidad, sino de la puesta en juego de estrategias cada vez más acabadas, completas, integrales, simbólicas y abstractas de solución de los problemas.

Puntualicemos, no se está en contra del planteamiento general de ir de lo sencillo a lo complejo, ésta ha sido una práctica que ofrece bondades.

Se rechaza la presunción de que el aprendizaje se logra a partir de integrar de manera progresiva y acumulativa, fragmentos de realidad, por más que éstos partan de lo sencillo.

Desde esta perspectiva y considerando que las matemáticas son un conocimiento que permite al alumno el análisis y la solución de situaciones problemáticas reales, a través de la puesta en juego de sus experiencias previas, - concretas y simbólicas -, tanto de la vida cotidiana como escolar, estaremos de acuerdo en que se requiere avanzar progresivamente y que para ello es necesario un recorrido paulatino de lo sencillo a lo complejo, siempre y cuando tengamos presente que este avance no es a partir de fragmentos de realidad o de partes inconexas de un concepto u operación.

De acuerdo con el enfoque para la enseñanza del Aritmética, el postulado didáctico de ir de lo “sencillo a lo complejo”, deberá plantearse en términos de las situaciones problemáticas mismas, de las relaciones entre los conceptos involucrados y de la puesta en marcha de las soluciones, favoreciendo en todo momento, el tránsito de procedimientos y soluciones espontáneas no convencionales hacia otras de mayor complejidad y abstracción, hasta llegar a nociones, conceptos y operaciones aritméticas convencionales.

- Se aprende matemáticas a través de la enseñanza de sus estructuras.

A diferencia de los planteamientos anteriores, esta corriente enfatiza que la clave para la enseñanza de los contenidos es la comprensión de la estructura matemática de los contenidos por aprender.

Las estrategias didácticas se centran en la enseñanza de conceptos y reglas atendiendo a la lógica del contenido, se desalienta la importancia en las habilidades de cálculo, substituyendo los ejercicios de práctica por actividades de comprensión tanto de los conceptos y las operaciones, como de las reglas por las que se pueden manipular y reorganizar a fin de descubrir nuevos patrones y propiedades.

Es así que para el proceso de enseñanza, se plantea como indispensable que el docente cuente con materiales objetivos que permitan a los alumnos trabajar y operar en forma concreta las propiedades y estructuras de los contenidos.

Algunos ejemplos de aplicaciones de esta corriente se encuentran en: los materiales Montessori para la enseñanza de los valores posicionales del sistema de numeración; los bloques aritméticos multibase de Dienes, las regletas de Cuisenaire y Gattegno; por mencionar solamente algunos de los que tuvieron más éxito.

Si bien, no es tan frecuente encontrar a la fecha ejemplos de la aplicación puntual de esta corriente o de sus materiales, sí se observan algunas prácticas didácticas relacionadas con ella.

Tal es el caso de la gran preocupación del docente por utilizar materiales objetivos y concretos durante sus clases, sin duda alguna en los primeros ciclos y al inicio de clase.

Es común en los primeros grados de la educación primaria, iniciar la clase con el juego libre, propiciando que los alumnos manipulen libremente los materiales con el propósito de descubrir formas y regularidades en ellos. Posteriormente, plantear una etapa de juego con el material, a fin de que los alumnos estructuren progresiva y sistemáticamente sus experiencias, favorecido esto por las características del mismo material y bajo el supuesto de que a partir de este momento se empieza a trabajar el concepto en estudio.

El ciclo de aprendizaje continua a través de guiar a los alumnos hacia manipulaciones o juegos cada vez más controlados de tal suerte que vayan descubriendo por sí mismos, representaciones y símbolos matemáticos. Hecho lo cual, se procede a sistematizar y formalizar el conocimiento.

Nuevamente, estamos ante una concepción parcial y que difiere del enfoque actual.

Si compartimos el hecho de que el aprendizaje se construye a partir de las acciones y transformaciones directas y en pensamiento, con y sobre los objetos de conocimiento, entonces, estaremos de acuerdo en que la palabra "*objeto*" no hace referencia exclusivamente a cosas, objetos o materiales concretos que simulen o representen la realidad. Al hablar de "*objetos de conocimiento*" es menester referirse también a representaciones, ideas, conceptos e hipótesis, por mencionar sólo a algunos de ellos.

Teniendo como base el enfoque actual, se reconoce que el material didáctico, concreto, objetivo, manipulable, es de gran apoyo durante el desarrollo de la actividad, ya que permite a los alumnos desplegar acciones directas y concretas para la verificación empírica de regularidades entre los objetos de conocimiento. Sin embargo, estas acciones por sí mismas no pueden ser la única fuente de conocimiento ni conducir necesariamente a representaciones conceptuales o a la construcción de aprendizajes matemáticos. Por el contrario, en más ocasiones de las que se quisiera, entorpecen el aprendizaje cuando el maestro abusa de ellos sin un propósito claro, propiciando un activismo irreflexivo asociado a la manipulación de los materiales.

De nueva cuenta, se requiere una aclaración en relación con las aportaciones de esta corriente y sus implicaciones en nuestro proceder didáctico.

No se desdeña la utilización de materiales y recursos objetivos y concretos para el trabajo didáctico con los contenidos, éstos son de gran utilidad para la conducción de una clase, máxime en los primeros grados. La condición necesaria que se impone es que su selección y uso estén supeditados a los propósitos del aprendizaje, que el momento en que se trabajen y las acciones que se hagan con ellos, propicien encuentros significativos para la construcción de los conocimientos implicados. Los materiales por sí mismos no irradian conocimientos, éstos se elaboran a partir de las acciones que los sujetos hacen con y sobre ellos.

El breve recorrido que hemos realizado por estas tres aproximaciones al proceso de enseñanza – aprendizaje, plantean una vez más, la necesidad de que el maestro analice de forma individual y en colectivo su práctica educativa, con la intención de asumir de manera explícita una postura docente, que no sólo ponga de manifiesto las ideas, conceptos, creencias y nociones que tiene en torno cómo se realiza el proceso de aprendizaje en sus alumnos, sino que le permitan responder a las interrogantes que los docentes nos hacemos al momento de planear nuestras clases.

Acciones de esta naturaleza contribuirán no sólo a la creación de un ambiente favorecedor del aprendizaje de nuestros alumnos, sino también al establecimiento de estrategias de autoformación docente, al clarificarnos a nosotros mismos y con el concurso de los otros, las diversas lecturas e interpretaciones del Plan y los Programas de estudio de la asignatura.

¡Lector, lo invito a seguir leyendo para que juntos intentemos aterrizar en el salón de clases!

El Plan de estudios y los programas de matemáticas

Por razones atribuibles a la extensión del artículo, a partir de este momento nos limitaremos a comentar de forma particular, lo relativo al eje *"Los números, sus relaciones y sus operaciones"*, lo que no significa que se deban trabajar los ejes del programa en forma aislada.

Desde la implantación del Plan y los Programas de estudio, hemos escuchado de manera reiterada que para el caso de las Matemáticas, el cambio fundamental consistía en la forma de abordar el proceso de enseñanza – aprendizaje; esto es, el énfasis se puso en el enfoque y en la metodología didáctica y, de manera colateral, en la selección y redistribución de los contenidos pertinentes y relevantes.

Dentro de los propósitos básicos que se plantean a partir del trabajo con los contenidos relacionados con este eje del programa, destaca el desarrollo de la capacidad para reconocer, plantear y resolver problemas, anticipar, estimar y verificar resultados, sistematizar procedimientos y estrategias, y comunicar e interpretar información matemática.

Como se observa, el enfoque propuesto para la enseñanza tomó como elemento central, lograr que los alumnos encontraran significado y funcionalidad al conocimiento aritmético, para, en última instancia, hacer de él un instrumento que les permitiera reconocer, plantear y resolver problemas en diversos contextos de su vida.

Podríamos decir, sin temor a equivocarnos, que dicho planteamiento, fue asumido con entusiasmo por los docentes; sin embargo, lejos estábamos en ese momento de valorar las implicaciones de tal transformación en el enfoque.

El cambio planteado iba más allá, que el simple hecho de reubicar el trabajo, que ya se venía haciendo, con la resolución de problemas. Exigía una reformulación de nuestras concepciones y saberes en torno a las formas de enseñar y de aprender.

¡Analicemos algunas cuestiones!

De diferentes maneras y a través de diversos materiales, la propuesta curricular reitera, que para el trabajo con la asignatura, el docente deberá tener presentes, entre otros, los siguientes planteamientos básicos y que caracterizan el Enfoque para la conducción del proceso de enseñanza – aprendizaje:

a) Las matemáticas, en tanto producto del quehacer humano, parten de la necesidad de resolver problemas concretos.

b) Las matemáticas, como contenido de aprendizaje en la educación primaria, permitirán que los alumnos planteen y resuelvan situaciones problemáticas.

c) Los alumnos aprenden construyendo a partir de saberes previos.

d) El aprendizaje se favorece al interactuar con otros.

e) El docente debe propiciar, favorecer y proponer situaciones de aprendizaje significativas.

Nuevamente, podríamos afirmar que al cabo de estos años de aplicación del currículo de la asignatura de Matemáticas, los docentes hemos asumido estos planteamientos, más aún estaríamos de acuerdo en que sería difícil encontrar a alguien que los contradiga; sin embargo, cuando planeamos nuestras clases y diseñamos nuestras estrategias didácticas, muchas veces nos hemos preguntado cómo traducirlos en lo práctico y cotidiano.

Bajo esta perspectiva y teniendo como marco el Plan y los Programas de estudio vigentes de Matemáticas, a continuación se mencionan algunas consideraciones que habría que tener presentes.

Por cuanto al *conocimiento matemático:*

- Es un proceso constructivo que se inicia de manera muy precoz, a través de una gran variedad de intercambios, de acciones y de transformaciones que el sujeto (alumno) realiza con los objetos del entorno.

- Este conocimiento evoluciona a partir de la propia actividad del sujeto, encaminada a la búsqueda, exploración y verificación de significados en torno a los objetos de conocimiento.

- El conocimiento implica no sólo actuar con y sobre los objetos, sino comprenderlos, representarlos ("internamente") y formar ideas, conceptos, nociones, relaciones, etc.

- El conocimiento apela tanto a las representaciones de los objetos, como a la interiorización de las acciones aplicadas, ejercidas o realizadas sobre ellos.

Por cuanto al *aprendizaje de las matemáticas*:

- El aprendizaje se construye sólo si lo que se aprende resulta significativo para el sujeto.

- Cuando el sujeto se enfrenta a un objeto de conocimiento o experiencia nuevos, "echa mano" de conocimientos y experiencias previas.

- El aprendizaje escolar es una forma particular de conocimiento construido por medio de un proceso amplio de elaboración, recreación y reconstrucción por parte del sujeto, consecuencia de sus interacciones con objetos de conocimiento.

- En este proceso, el sujeto realiza acciones y transformaciones directas con y sobre los objetos, pero también sobre las representaciones internas que se ha formado de ellos y de las relaciones y operaciones que entre ellos se han ido elaborando paulatinamente.

- La actividad del sujeto que aprende es un factor importante, sin embargo no es suficiente, lo esencial reside en la naturaleza de la actividad; esto es, en qué medida la actividad desplegada por el sujeto es necesaria para contrarrestar el desequilibrio cognitivo que provoca enfrentar una situación parcialmente conocida. La actividad, entonces, propicia un aprendizaje significativo y no sólo un activismo.

Por cuanto a la *enseñanza de las matemáticas:*

- Los contenidos de la asignatura son objetos de aprendizaje, lo esencial no es enseñarlos, sino cómo propiciar que el sujeto los haga suyos, que los aprenda.

- El docente no impone o transmite conocimientos, sino que propicia, sugiere y propone situaciones problemáticas.

- El contenido no es un conjunto "cosificado" de conocimientos, susceptibles de enseñarse; por el contrario, es un sistema de informaciones, relaciones, conceptos, y operaciones, que se elaboran y construyen gradualmente.

- El aprendizaje, y en consecuencia el proceso que lo promueva, requiere de la manipulación directa, concreta y en pensamiento de los objetos de conocimiento y no sólo de objetos de la realidad.

- El aprendizaje es un proceso continuo y gradual, por ende, las estrategias didácticas empleadas, deben propiciar oportunidades constantes para volver hacia atrás y retomar logros pasados.

El Enfoque para el trabajo de la asignatura, plasmado en el Plan y los Programas de estudio, incorpora estos planteamientos, cuando establece, entre otras cuestiones, que:

- El punto de partida y elemento central de las secuencias didácticas, habrá de ser la actividad de los alumnos frente a situaciones problemáticas.

- Los aprendizajes serán significativos si emergen de una variedad de problemas reales.

- Para la solución de problemas, los alumnos habrán de plantearse hipótesis o ideas y elaborar estrategias personales (espontáneas y/o formales) para enfrentarlas.

- Es importante el diálogo, el intercambio y la confrontación de dichas estrategias y procedimientos personales entre los alumnos, a fin de arribar a propuestas colectivas o grupales.

- El aprendizaje no es un producto que se logra en una sesión o que concluya en una sola clase, por el contrario se caracteriza por ser un proceso gradual, que conduce paulatinamente a representaciones y procedimientos cada vez más formales.

- Se busca que los alumnos no sólo resuelvan problemas, sino que utilicen sus conocimientos para el análisis, el planteamiento y la solución de situaciones problemáticas propuestas por ellos mismos, como resultado de sus interacciones con el medio que los rodea.

Podríamos seguir enumerando muchos más elementos a considerar y que se encuentran en la gran variedad de materiales complementarios y de apoyo que han sido elaborados.

Por ello, a estas alturas del texto, muy probablemente usted lector, pensará que lo dicho hasta el momento le resulta conocido, pues en más de una ocasión lo ha escuchado, sea en sesiones del Consejo Técnico de su escuela o en los cursos de actualización que ha tomado anteriormente.

¡Y tendrá usted razón!

Como bien advertíamos al inicio de este texto, es intención de la autora, traer a la mesa elementos de reflexión y análisis, más que ofrecer respuestas.

Por ello, le propongo ahora que ¡Echemos una mirada al salón de clases! Y veamos qué es lo que ahí sucede. . .

Tomemos a manera de ejemplo una clase de 2º grado de educación primaria, con un tema ubicado en el eje "*Los números, sus relaciones y sus operaciones*".

Contenidos:

- *Diferentes representaciones de una misma cantidad a través de sumas.*
- *Análisis de la información que contiene una ilustración, para resolver y plantear problemas de suma con sumandos iguales y de resta.*

Tomado de: Avance Programático. Segundo grado. (1997). Pág. 14

En esta ocasión, el Maestro se propone trabajar con la lección # 8 del Libro de Texto de los alumnos.

Lección del Libro de Texto: La feria del pueblo

La feria del pueblo

3 pesos

4 pesos

5 pesos

2 pesos

3 pesos

4 pesos

1 peso

3 pesos

- Elia y René tienen 15 pesos entre los dos para gastar en la feria. ¿En que pueden gastar su dinero?

____

____

____

____

- Paco quiere comprar un elote, subir dos veces a la rueda de la fortuna y jugar tres veces a reventar globos. ¿Cuánto va a gastar? ________

- Inventa otros problemas que se puedan resolver con los datos del dibujo. Escríbelos y resuélvelos en tu cuaderno.

- Con el grupo y tu maestro, comenten los problemas que inventaron.

LECCIÓN 8

17

Tomado de: Matemáticas. Segundo grado. Lección 8. (1977). Pág. 17

¡Observemos lo que ahí sucede!

Descripción resumida de la clase:

<u>Maestro</u>: El día de hoy, vamos a jugar a que vamos a la feria del pueblo y que estando ahí, queremos comprar algunas cosas que se nos antojan. A cada uno de ustedes le voy a repartir 20 papelitos, como si fuera dinero. Cada papelito es un peso.
Saquen su libro de Matemáticas y ábranlo en la página 17. Fíjense bien en la ilustración.
(Preguntas a los alumnos sobre el contenido de la ilustración, destacando los letreros con precios)
(Preguntas dirigidas a alumnos individuales)
<u>Maestro</u>: Si quieres comprar un globo, dar una vuelta en los caballitos y otra en la rueda de la fortuna, cuánto gastarías?
<u>Alumno1</u>: A ver . . . ¿hay que sumar, verdad? . . .4 + 5 + 3 . . . (contando con dedos) *12!*
<u>Maestro</u>: Muy bien, pero vamos a intentar llegar al resultado sin usar los dedos, háganlo mentalmente. (resto del grupo, jugando con los papelitos)
A ver, hagamos otro ejercicio. Quieres comprar un algodón, un globo, subirte a la rueda de la fortuna y tirar al blanco. ¿cuánto dinero gastarías?. Los demás háganlo en su cuaderno.
<u>Alumno2</u>: ¡Ah, ya sé, también es de suma!, a ver . . . algodón 2 pesos, más globo 4, más 5 rueda de la fortuna, . . . ¿qué más? . . .
<u>Maestro</u>: Acuérdate, te falta tirar al blanco.
<u>Alumno2</u>: Ah sí, . . . tirar al blanco, 4 pesos . . . ¿cuánto llevaba?
<u>Maestro</u>: A ver, ya habías dicho 2 + 4 + 5 . . ., más los 4 que te faltaban . . ., súmalo todo junto, ¿cuánto es?
<u>Alumno2</u>: (Anota los números en su cuaderno y realiza la suma) *6, 11, 15 . . . gastó 15.*
(De igual forma, y con otros alumnos, se realizan tres ejercicios adicionales, el resto del grupo va anotando en sus cuadernos)
<u>Maestro</u>: Bueno, ya entendieron de lo que se trata el juego. Ahora sí, por equipos de cuatro vamos a resolver el ejercicio del libro.
<u>Alumnos</u>: (Se reúnen en equipos)
<u>Maestro</u>: (Dirige la lectura en voz alta, dando un tiempo para que los equipos anoten el resultado, en caso necesario, corrige con ayuda de algún niño, los errores que se presenten)
<u>Alumnos</u>: (Algunos de ellos siguen al Maestro, otros conversan o juegan con los papelitos, todos anotan las respuestas)
<u>Maestro</u>: Como veo que quieren seguir jugando, por equipos, inventen dos problemas y escríbanlos en sus cuadernos.
(El Maestro recorre el salón, si algún equipo lo requiere vuelve a explicar la tarea y ayuda en su solución)
<u>Maestro</u>: Ya acabamos. Guarden su libro.

¿Qué pasó?

¿Se parece en algo a lo que hacemos en clase?

Teniendo como referencia lo dicho en torno a lo que implica aprender y enseñar Matemáticas, analicemos juntos algunas cosas que ahí suceden.

- De alguna manera, el maestro toma en consideración que el conocimiento se construye y evoluciona a partir de las acciones que pueden realizar los alumnos con los objetos del entorno; sin embargo, no hay un trabajo explícito de rescate de los conocimientos anteriores, la actividad emerge no sólo a solicitud del maestro, sino además él impone una forma de representación simbólica, al indicar que los "*papelitos son un peso*".

- Si bien la actividad puede resultar atractiva e interesante para los alumnos, inmediatamente se plantea en términos escolares: "*saquen su libro*". En consecuencia, el contenido a aprender no necesariamente resulta significativo, en el mejor de los casos, la actividad por sí misma resulta atractiva para algunos alumnos individualmente. Sin embargo, planteada en esos términos, se corre el riesgo de caer un "activismo" sin sentido, pues algunos alumnos buscan dar respuesta a la pregunta del maestro, en tanto que otros, juegan con los "*papelitos*".

- No se reconocen como punto de partida, los procedimientos y estrategias no convencionales de los alumnos (*contar con los dedos*) producto de experiencias previas, para avanzar paulatinamente hacia niveles de mayor complejidad y abstracción.

- La preocupación del docente se centra en *enseñar el contenido*, de ahí que se esfuerce en explicar claramente lo que se tiene que hacer, involucrando al resto del grupo (*los demás háganlo en su cuaderno*), en lugar de plantear una situación problemática lo suficientemente interesante que "atrape" el interés de los alumnos y que los mueva a su solución.

- Los alumnos intuyen rápidamente que se trata de *"sumar"*, por lo que su preocupación es aplicar el algoritmo y no el análisis y representación de la situación problemática, para la búsqueda de estrategias de solución.

- El Maestro reformula lo expresado por el alumno e impone en términos escolares el procedimiento convencional (*ya habías dicho 2+4+5 . . . súmalo todo junto)*, preocupado por "enseñar", olvida que el aprendizaje requiere de que el alumno, a partir de sus hipótesis e ideas, formule y pruebe sus propias estrategias.

- Se ejercita un proceso "sencillo" (sumas directas de dos o tres sumandos, para llegar a un resultado), para después resolver "problemas" más complejos como el planteado en la lección del libro (*Elia y René tienen 15 pesos entre los dos para gastar en la feria. ¿En qué pueden gastar su dinero?*), desconociendo que entre una y otra situación problemática, hay grandes diferencias conceptuales.

- El trabajo en equipo que se realiza, no es más que una forma "práctica" de organización del grupo, y no una situación que propicie el diálogo, el intercambio y la confrontación de estrategias y procedimientos entre pares alumnos.

- Finalmente, la clase concluye solicitándole a los alumnos que ¡inventen problemas! . . . no obstante que durante la sesión no se haya trabajado al respecto. En ningún momento se propicia que los alumnos propongan situaciones semejantes, ni siquiera que se analicen las planteadas por el maestro, con el propósito de identificar: información relevante, datos pertinentes, identificación del problema a resolver, entre otros elementos. En el mejor de los casos, los alumnos replicarán los problemas trabajados y propuestos por el profesor o por el libro, sin que ello implique avanzar en la elaboración de aprendizajes significativos para el análisis y solución de situaciones problemáticas emanadas de la vida real.

Probablemente, usted pensará que la reseña de la clase no lo refleja o que la crítica que se hace es tendenciosa . . . por lo que ¡está usted en todo su derecho de contra-argumentar!

Es mas, lo invito no sólo a comentarlo con sus compañeros, sino a seguir leyendo, a continuación retomaremos algunos de los planteamientos que hemos hecho hasta el momento, con la intención de aportar mayores elementos para el análisis de su práctica concreta.

El docente y el proceso de enseñanza – aprendizaje

Iniciaremos este apartado, reiterando que el docente habrá de tener presente que el proceso educativo en general y su hacer didáctico en el aula en particular, son actos intencionales.

Lo que implica la toma de decisiones conscientes en torno a sus acciones didácticas, con miras a dar respuesta a algunas de las preguntas que hemos formulado a lo largo del texto. A saber: ¿cómo conocen los niños y las niñas el mundo que los rodea?, ¿qué deben aprender los alumnos en la escuela?, ¿cómo propiciar la construcción de aprendizaje significativos?, ¿cuáles son, entonces, los propósitos del trabajo con esta asignatura?, ¿cómo organizar la enseñanza?, por mencionar sólo algunas de ellas.

Convencidos de que las respuestas habrán de encontrarse en la manera en la que el docente decide, planea y desarrolla su proceso de enseñanza – aprendizaje; es decir, cómo a través de una acción didáctica claramente definida, plantea la interacción sistemática e intencionada que se da entre el maestro y el alumno para la consecución de un objetivo de conocimiento concreto.

¡Y es justamente a este punto al que queremos llegar!

La reflexión y el análisis de los aspectos teóricos relacionados con la enseñanza de las Matemáticas, deberán conducir a que el docente cuente con mayores elementos para realizar su labor; es decir se traduzcan y concreten en mejores clases.
La acción didáctica es entonces, la organización de las actividades para la interacción propiamente dicha entre el sujeto que aprende y los "objetos" de conocimiento, con el propósito de propiciar y favorecer acercamientos significativos con los contenidos.

A su vez, esta interacción entre educador – educandos – contenidos escolares – aprendizajes, presenta distintas fases o momentos: inicial, de desarrollo y de cierre.

De manera muy sencilla, y a riesgo de parecer simplista, diríamos que las actividades de inicio son aquéllas que permiten identificar el problema dentro de un contexto determinado e invitan a la acción. Las actividades de desarrollo son todas aquellas acciones concretas y simbólicas que realizan los alumnos para la elaboración – construcción de aprendizajes significativos. En tanto que las acciones de cierre, son aquéllas que contribuyen a afianzar y sistematizar lo aprendido, a la vez que son fuente de nuevas búsquedas, de nuevas situaciones problemáticas.

Reconociendo la necesidad de que los docentes vayamos construyendo posturas metodológicas y procesos didácticos que nos permitan avanzar, a continuación presentamos algunos elementos metodológicos generales.

- Las matemáticas se aprenden y se enseñan pero también se crean y se utilizan y, sirven para aprender otras cosas.

  Con ello hacemos referencia no sólo a las matemáticas como contenido escolar, sino a todas las matemáticas que existen en la sociedad.

  En su proceso de aprendizaje, los alumnos construyen redescubriendo el conocimiento dentro de un contexto específico.

- Se enseña matemáticas en la escuela en respuesta a una necesidad individual y social.

  Debemos saber “un poco de matemáticas” para poder resolver o cuando menos reconocer problemas en nuestro entorno, por lo tanto las matemáticas de la escuela deben estar relacionadas y aportar elementos para la respuesta a necesidades matemáticas de la vida diaria en sociedad.

  ¡Y no a la inversa!, debemos abandonar la idea (frecuente) de que se aprende matemáticas porque se enseñan en la escuela, para avanzar en la perspectiva de que el proceso de enseñanza – aprendizaje de los contenidos matemáticos deben tomar en cuenta lo que ocurre fuera de la escuela.

- Se resuelven problemas a partir de conocimientos y herramientas matemáticas que ya se conocen y se saben utilizar.

  Para resolver un problema, el sujeto que aprende, echa mano de formas de hacer conocidas, de manera escolar (antecedentes formales) y de manera natural y espontánea (antecedentes o procedimientos no formales), que muy a menudo se tiene que modificar, así sea ligeramente, pues la situación no es idéntica.

- El docente promueve el aprendizaje.

El maestro propicia que la situación problemática y las acciones a realizar para su resolución, no sólo despierten el interés de los alumnos, sino que lleven a la modificación y al enriquecimiento de los aprendizajes previos, favorece además intercambios entre los alumnos y apoya en la posible sistematización.

El que aprende: construye y crea.

El que enseña: propicia medios para ello.

- Aprender matemáticas no es solamente saber definiciones de conceptos, realizar cálculos exactos, aplicar reglas y resolver operaciones; por el contrario, es saber resolver problemas en sentido amplio, lo que incluye encontrar preguntas para identificar el problema, analizar la información con la que se cuenta, identificar o elaborar estrategias de manera individual y colectiva para resolverlo, ponerlas en juego adecuadamente para llegar a un resultado y solucionar el problema.

  Y en todo esto, el profesor propone, decide, conduce, orienta, colabora, en la propuesta de situaciones, medios y materiales.

- Los problemas propuestos habrán de ser expresados en un lenguaje natural, extraídos del contexto social cotidiano. Resulta innecesario y absurdo proponer situaciones complejas y artificiales.

  La realidad es el contexto de donde surgen los problemas y al que deben regresar las soluciones.

- La automatización de los algoritmos, en tanto estrategias convencionales de solución, puede ser un propósito escolar; sin embargo, no constituye un pre – requisito para la acción o el trabajo con los problemas, por el contrario, son un resultado de ésta.

- Los materiales concretos y objetivos han de servir durante todo el proceso para la simulación y modelación de las situaciones problemáticas, así como también para la representación de las relaciones en juego y la búsqueda de soluciones; y no solamente al inicio de la actividad como fuente de motivación externa.

- No hay que olvidar que el aprendizaje es un proceso gradual, no hay todo o nada, debemos tener presente que toda actividad escolar conduce a algún aprendizaje de algún tipo y en algún grado; sin embargo, dado que hemos señalado que el aprendizaje escolar es un proceso con intención, el docente debe proponer situaciones y ambientes de aprendizaje en las que se aprenda mejor lo que se busca.

¡Y esto es, justamente una secuencia didáctica!: la manera en la que el profesor consciente del proceso, propicia, acompaña, ayuda y orienta el recorrido que el alumno hace para construir sus conocimientos.

A manera de ejemplo . . .

En el marco de estas actividades o momentos didácticos generales para el aprendizaje, a continuación se presenta un ejemplo de secuencia didáctica para el trabajo con problemas aditivos en el aula, emanado de la observación de una clase de 4º grado de educación primaria.

Antes de presentarlo, es fundamental dejar asentado claramente que se trata de un ejemplo, surgido de una clase real, para nada pretende ser un prototipo de proceso didáctico básico.

Contenidos:

- Problemas de suma y resta. (Lección 5. La rueda de la Fortuna. pp 16 y 17)
- Resolución e invención de problemas, a partir de una información. (Lección 7. ¿Se puede responder?. pp 20 y 21)

Tomado de: Avance Programático. Cuarto grado. (1994). Págs. 12 y 13

Secuencia didáctica

A partir de una situación concreta de la vida real, cotidiana o escolar:

- Proponer a los alumnos la realización de una actividad, un juego o un proyecto que involucre situaciones de experimentación matemática; es decir, situaciones problemáticas.

- Incluir de manera explícita elementos para la reflexión, dentro de la situación problemática a resolver.

- Propiciar intercambios entre los niños; es decir, invitar al análisis colectivo, que los niños expresen si han estado en situaciones semejantes, que digan qué han hecho y cómo lo resolvieron.

- Invitar a los alumnos a volver a ver la situación que ahora se plantea con el propósito de que detecten, de manera individual y colectiva, los elementos e informaciones pertinentes para la solución del problema: situación en que se da, datos con los que se cuenta, pregunta a resolver, etc.

- Invitar a los alumnos de manera individual y por equipos, a que la búsqueda de estrategias para su solución, poniendo a su disposición, materiales objetivos o propiciando formas de representación gráfica, simbólica o numérica.

- Solicitar y escuchar las explicaciones de los niños, en torno a las diferentes formas de proceder.

- Realizar comentarios grupales sobre las formas elegidas por ellos para la solución de los problemas, a fin de ponderar las diversas estrategias.

- Propiciar el establecimiento de propuestas y/o acuerdos colectivos de el o los procedimientos que les parezcan más adecuados.

- Prueba de dichos acuerdos para la solución del problema planteado, dentro del contexto real en el que surgió.

- Invitación a los niños a formular y plantear a los demás, otros problemas, semejantes a los resueltos, tanto de manera individual como colectiva.

- Sistematizar las estrategias empleadas, a través de la solución de nuevas situaciones problemáticas de la realidad.

Formulemos algunos comentarios al respecto de esta secuencia didáctica, con la intención de resaltar aquellos aspectos que reflejan una actividad docente más cercana a lo que hemos venido comentando a lo largo de este texto.

- Se contextualiza el problema a resolver, en el momento en que el docente plantea, dentro de un contexto amplio y ubicado en la realidad, una situación problemática a resolver, de tal manera que sean los alumnos quienes identifiquen tanto el problema como los elementos relevantes y pertinentes para resolverlo.

- Se propicia la puesta en marcha de estrategias y conocimientos previos, al invitar a los alumnos a que propongan estrategias de solución a partir de lo que ya conocen y saben utilizar, dando cabida a que emerjan procedimientos no convencionales

- Se ponen en juego diferentes formas de representación, al identificar y precisar la información pertinente para su solución, los datos con los que se cuenta y la incógnita a resolver.

- Se ponen a disposición de los alumnos, materiales objetivos y/o concretos; sin embargo, la actividad no se limita a ellos.

- Se propician intercambios individuales y colectivos entre los niños, con la intención de que analicen y prueben diferentes caminos y estrategias para solucionar un problema determinado.

- La confrontación de propuestas y la discusión de ventajas y desventajas de unas y otras para el establecimiento de acuerdos entre ellos, propicia la elaboración de aprendizajes significativos.

- No sólo se resuelve un problema real, sino además se promueve la propuesta y solución de otros problemas semejantes.

- La sistematización y automatización de lo aprendido se va dando de manera gradual como resultado de las acciones desplegadas.

Nuevamente, es necesario apuntar que:

¡Corresponde a usted lector, valorar la utilidad y pertinencia de este tipo de propuestas didácticas!.

¡Lo invitamos a hacerlo!

Con ello, podríamos dar por terminado este artículo y satisfechas las intenciones y propósitos originales; sin embargo, vamos a abusar un poco más de su paciencia, para hacer un breve comentario de un recurso didáctico, invitado de última hora al escenario escolar: Enciclomedia.

Retos ante los nuevos escenarios, la llegada de Enciclomedia

Mucho hemos escuchado de ella, quizá hasta hemos asistido a cursos de actualización en los que se nos ha preparado para su uso.

Enciclomedia, ¿novedad que llega al salón de clases?

En cierta medida sí, puesto que es una herramienta informática que, bien utilizada, será de gran ayuda; sin embargo, al igual que otros recursos, debe ser valorada en su justa dimensión.

Desde la perspectiva de quien escribe este texto, ¡Puntualicemos algunas cuestiones!

Efectivamente, Enciclomedia es una herramienta que permite vincular distintos y variados recursos al proceso de enseñanza – aprendizaje, ya que ofrece una gama muy amplia de posibilidades para el enriquecimiento de nuestras clases.

En este sentido, los docentes habremos de tener claridad en lo que implica su utilización.

No es una estrategia didáctica en sí misma, su valor radica en el uso intencionado y racional que hagamos de los recursos que ofrece, como apoyo para el desarrollo de las lecciones.

Como lo hemos dicho anteriormente, a propósito del apartado relativo a la planeación de las secuencias didácticas, antes de determinar qué tipo de recursos y cómo los podríamos utilizar en nuestra clase, lo primero que debemos identificar son los propósitos del tema a desarrollar y las situaciones de aprendizaje que contribuirán a lograrlos; hecho lo cual, habremos de identificar y definir cuáles de los recursos, situaciones o materiales interactivos que se encuentran en Enciclomedia, son pertinentes.

Para ello, es importante que el docente conozca y haya explorado, los dos componentes básicos que ofrece la herramienta, a saber:

- El *Sitio del alumno*, donde se encuentra la versión digital del los libros de texto, enriquecida con variados recursos multimedia, y

- El *Sitio del maestro*, donde se encuentran los materiales de apoyo para el profesor.

Con fines de clarificación, a continuación se propone un recorrido posible.

Decisiones del docente	Acciones a realizar
Tema específico a desarrollar con los alumnos	Búsqueda en el *Sitio del maestro*, para determinar: • Ubicación del tema en el Plan y programas de estudio y en el Avance programático. • Enfoque y propósitos en el Libro para el Maestro.
Situaciones de aprendizaje significativas	• Esbozo de las actividades de inicio, desarrollo y cierre fundamentales. • Diseño de la secuencia didáctica a partir de las características del grupo y de los antecedentes con los que se cuenta
Situación problemática a plantear	Búsqueda en el *Sitio del alumno*, para determinar: • Lección con la que se podría apoyar el desarrollo de la clase. • Recursos multimedia disponibles
Identificación de los recursos pertinentes	• Selección de los mismos e incorporación en la secuencia didáctica.

Como se observa, no es a partir de la utilización de Enciclomedia que se planea una clase, por el contrario, primero se planea / diseña la secuencia didáctica y después se analiza al recurso, para determinar qué posibilidades nos ofrece para el enriquecimiento de la misma.

Maestro, lo invito a que seleccione un tema del programa de 5º o 6º grados, relacionado con el eje *"Los números, sus relaciones y sus operaciones"* y a partir de la secuencia didáctica sugerida en el apartado anterior, formule una propuesta utilizando el recurso de Enciclomedia; de ser posible coméntela con sus compañeros.

Palabras finales

Si usted se encuentra leyendo estas palabras, significa que me acompañó en el recorrido.

Tal y como se expresó al inicio del texto, la intención de este trabajo fue aportar elementos para la reflexión del quehacer docente en torno a la asignatura de Matemáticas, formular preguntas e invitar a la acción para la búsqueda de respuestas.

Se habrá logrado el propósito si lo dicho en el documento puede llegar a ser una "*situación problemática*" que le lleve usted, Maestro lector, a tomar decisiones para enriquecer su trabajo didáctico; y más aún si se hace conversando con otros colegas.

De algo habremos de estar seguros: el análisis y la reflexión, individual y colectiva, de nuestro hacer docente cotidiano, nos permitirá construir alternativas para una educación de calidad.

Recomendaciones bibliográficas para seguir en el tema

ÁVILA, Alicia. *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudio sobre los procesos de trasmisión y apropiación del saber matemático escolar*. Tesis doctoral. UNAM. México.2001.

--------- (directora) y colaboradores. *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas.* En Informes de investigación. Temas prioritarios. SEP. 2004.

CHEVALLARD, Yves, Marianna Bosch y Joseph Gascón. *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Horsori/ICE. España. 1997. (Biblioteca del Normalista)

GINÉ Nuria y Artur Parcerisa (coords). *Planificación y análisis de la práctica educativa. La secuencia formativa: fundamentos y aplicación.* Graó, España. 2003. (Biblioteca del aula)

GUERRERO, Adela. *El proceso de enseñanza-aprendizaje de las operaciones aritméticas elementales. (Desde una perspectiva psicopedagógica).* Tesis doctoral. UNAM. México.1997.

PARRA Cecilia e Irma Saiz (comps). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones.* Piados Educador. Buenos Aires Argentina. 1994.

SAINT-ONGE, Michel. *Yo explico pero ellos . . . ¿aprenden?.* SEP/FCE/Ediciones Mensajero,2000. México. 2001. (Biblioteca para la actualización del maestro)

NOTA: Materiales curriculares consultados:

SEP, *Plan y programas de estudio para la educación básica. Primaria.* México. 1993.

------ , *Libro para el maestro. Matemáticas* (primero a sexto grados). México. 1999.

------ , *Matemáticas.* Libro de Texto del alumno (primero a sexto grados). México. 1999.

-- - - , *Avance programático*. (primero a sexto grados). México. 1999

Los problemas, recurso metodológico en el que los números y sus relaciones encuentran significado

Irma Fuenlabrada

En los planteamientos curriculares de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática anteriores a la reforma educativa de 1993, los problemas eran vistos fundamentalmente como el espacio privilegiado para la aplicación de un conocimiento adquirido: los números y la operatoria. Sin embargo, en los lineamientos actuales los problemas se asumen como el punto de partida a través del cual los números y sus relaciones en particular, y el conocimiento matemático en general, encuentra significado. Pero esto todavía no ha sido cabalmente comprendido por los maestros, porque ello les implica una reconversión de sus concepciones sobre la matemática susceptible de ser enseñada en la escuela primaria, de sus prácticas de enseñanza y de sus ideas acerca de cómo aprenden los niños.

A más de una década de implementada la reforma, investigaciones recientes (Moscoso, 2005; Martiradoni, 2004; Ávila, 2004) muestran que los maestros, han incorporado a su discurso pedagógico algunas de las componentes de dicho enfoque, así algunos dicen: "el aprendizaje debe ser significativo", otros cuestionan a "las mecanizaciones", unos más se refieren a "las situaciones problemáticas" y ya no a "los problemas", comentan sobre las bondades del "constructivismo" y cuestionan al "conductismo". No obstante, dicho discurso se desdibuja en la realidad del aula. Si bien, se asume que toda reforma educativa ineludiblemente es transformada por los docentes, esto no significa renunciar a que las partes nodales de la Propuesta de educativa de 1993 vayan siendo incorporadas a las prácticas docentes.

Aunado a lo anterior, en los últimos años aparece, en el ámbito docente, el discurso difuso de la enseñanza "por competencias" que empieza a gestar confusiones en los maestros. Éstas apuntan a suponer que la Propuesta de 1993 está siendo desplazada por el nuevo discurso de las competencias y que las situaciones didácticas en las que se expresa la propuesta de 1993 "deben" ser sustituidas por "los proyectos".

Desde este panorama, el propósito del artículo plantea en primera instancia, ayudar a los maestros a comprender que el discurso educativo "novedoso" de "desarrollar competencias", que empieza a coexistir con el de "situaciones problemáticas", ni es tan novedoso como tampoco antagónico al enfoque metodológico definido para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el sistema educativo nacional desde 1993. En segunda instancia, se hace necesario seguir enfatizando la consecución de uno de los objetivos centrales de la propuesta educativa de la década de los noventa, a saber: que las acciones de los niños frente a las situaciones problemáticas transiten de lo pertinente hacia lo eficiente y eficaz. En el entendido que la pertinencia de una acción frente a un problema se muestra cuando los alumnos pueden elegir entre varias opciones, aquella que es la más apropiada a la situación; mientras que la elección de una estrategia eficiente y eficaz conlleva la apropiación de conocimientos cada vez más elaborados, a los que se llega a

través de un proceso de aprendizaje. Este objetivo, como veremos más adelante, implica dos cosas: el desarrollo de competencias y la apropiación de conocimiento matemático.
A fin de aclarar cómo sucede esto último, reflexionaremos sobre la lógica de la propuesta de enseñanza que articula específicamente la secuencia de los contenidos referidos a los números y los problema aditivos y su tratamiento didáctico expresados en los materiales de apoyo a la enseñanza y al aprendizaje editados por la SEP (1993a, 1993b, 1994, 1994a 2000), con el propósito de seguir acompañando a los maestro, en esa necesaria resignificación disciplinaria y metodológica que les demanda la Propuesta educativa de 1993.

1. Las preocupaciones educativas que antecedieron al *Plan y programas para la educación básica. Primaria,* editado por la SEP en 1993.

Hacia el final de la década de los ochenta (como se hiciera al término de la de los sesenta) se discute y cuestiona en diversos foros educativos y académicos internacionales, la pertinencia y la calidad de la educación. Moretto (citado por Nogueira, Rivera y Blanco, 2003) considera que para entonces: "(…) todo había cambiado, la sociedad, el mercado de trabajo, las relaciones humanas (…) sólo la educación continuaba siendo la misma ¿Entonces estaba todo errado? No, el contexto social de épocas pasadas aceptaba esa formación. El problema es que ese contexto ya no existe". La sociedad decía Moretto, tiene hoy otras prioridades y exigencias en las que la acción es el elemento clave.

En la década citada, un grupo de investigadores, orientaba sus estudios sobre la pertinencia de definir y caracterizar las competencias necesarias para desenvolverse con éxito en la vida e intentaban caracterizar, cuáles de estas competencias eran susceptibles de ser desarrolladas en la escuela. Mientras que, por su parte las investigaciones en las distintas didácticas específicas contaban para entonces (particularmente la didáctica de la matemática), con un considerable acervo de resultados compartidos sobre enseñanza y aprendizaje (infantil). Sin embargo, ninguna de las dos perspectivas –el de las competencias y el de las didácticas- habían impactado todavía a los sistemas educativos como alternativas posibles de solución a la baja calidad y pertinencia de la educación.

En este escenario, según se reporta en el informe de la comunidad europea EURYDICE (2003: 119-124), los Países Bajos en 1993, pusieron el acento en el desarrollo de competencias en sus respectivas reformas; así sus programas se articularon en torno de lo que se definió como los temas transversales[1]. Otros países como México, orientaron sus esfuerzos a incorporar los resultados de la investigación de las distintas didácticas (cada una en su nivel de avance) en su sistema educativo[2]. Así, en términos generales, las decisiones de reformulación de la educación se eligieron básicamente de entre dos caminos: las competencias o las didácticas específicas. Aunque hubo países como Austria (EURYDICE, 2003: 125) que no se posicionaron claramente en ninguna de las dos posturas, puesto que creyeron que sería suficiente con modificar los objetivos de la enseñanza en términos de competencias, sin proponer los cambios consecuentes en los materiales de apoyo a la enseñanza y al aprendizaje; es decir, se redefinió el discurso pedagógico pero no los recursos para la enseñanza en los que seguían prevaleciendo los principios conductistas del aprendizaje.

En la medida en que la propuesta de desarrollo de competencias aparece como una alternativa a la enseñanza enciclopedista, surge la pregunta: ¿se va a la escuela para adquirir conocimientos o para desarrollar competencias?, en la que subyace un malentendido que consiste en creer que, **al desarrollar competencias se renuncia a transmitir conocimientos**[3]. Ahora bien, como casi todas las acciones humanas exigen conocimientos, a veces reducidos y en otras ocasiones muy amplios, que se adquieren a partir de la experiencia personal, del sentido común, de la cultura compartida. La escuela tiene que seguir haciéndose cargo de difundir el conocimiento porque es en ella donde está el espacio privilegiado para transmitir la cultura compartida.

Nogueira, Rivera y Blanco (2003:2) reflexionando sobre este aparente antagonismo entre las propuestas educativas basadas en el desarrollo de las competencias y las que tiene como referente los resultados de la investigación de las didácticas específicas, señalan que: "una gestión docente basada en la formación de competencias, tiene que asumir <u>estrategias didácticas alejadas de los estilos de dirección de 'caja negra', sustentados sólo en los resultados, lo que corresponde a criterios metodológicos conductistas y desarrollar una dirección docente de 'caja transparente', como expresión de un referente constructivista de carácter histórico-cultural"[4]</u>.

Al respecto, Perrenoud (2003), entre otros autores, señala que la noción de competencia puede definirse como la capacidad de actuar de manera eficaz en un tipo definido de situación, capacidad que se apoya en **conocimientos** pero no se reduce a ellos.

Las competencias se forman a través de la práctica, ellas se construyen "necesariamente en situaciones concretas, con contenidos, contextos y desafíos identificables" (Perrenoud, 2003: 48), **siendo necesario un trabajo didáctico** con base en situaciones de la vida y situaciones-problemas, desarrollando un equilibrio entre aquellas que son similares (situaciones de vida) y las que son nuevas (situaciones-problema) que permiten enfrentarse a obstáculos nuevos.

La reforma educativa de los Países Bajos implementada en 1993, como se anticipara, dio prioridad al desarrollo de destrezas y competencias (las definidas como transversales) más que a la adquisición de conocimientos. Después de un estudio profundo de sus efectos, busca desde el 2003 (EURYDICE 2003: 119-124) el equilibrio entre un currículo basado en destrezas y competencia y uno basado en conocimientos.

En Austria (EURYDICE, 2003: 125-129) se reflexiona sobre las consecuencias de haber modificado solamente los objetivos de la educación en términos de competencias y no haber atendido –en ese sentido- la reformulación de materiales: "existe una preocupación creciente sobre las dificultades que se pueden encontrar a la hora de aplicarlo [currículo por competencias]". Su formulación relativamente vaga se opone claramente a la definición tan detallada de los contenidos de las diferentes materias y a los recursos metodológicos que subyacen en los materiales de enseñanza y en especial en los libros de texto, que influyen en la práctica docente con mayor peso que la de los objetivos generales (articulados desde las competencias)[5].

Por su parte, México, como otros países tomaron como referente para sus respectivas reformas educativas, los resultados de la diferentes didácticas específicas, porque asumieron que los problemas observados en la calidad de la educación, provenían fundamentalmente de los procesos de enseñanza dominantes, es decir, reconocieron que las estrategias de enseñanza no respondían (en gran medida) a las maneras –en ese entonces ya estudiadas sobre- cómo los niños acceden al conocimiento.

En México, particularmente, esta postura de reformulación de la educación (anclada en los resultados de las didácticas específicas) se expresó, en *Dialogar y Descubrir* para Cursos Comunitarios del CONAFE[6] así como en la Reforma Educativa nacional, a través de una **propuesta de desarrollo curricular diseñada desde una postura constructivista del aprendizaje**, recurso por el que se optó para comunicar al magisterio el nuevo enfoque metodológico para la enseñanza y el aprendizaje de las distintas áreas de conocimiento que conforman el *Plan y programas para la educación básica. Primaria,* editado por la SEP en 1993.

Más adelante en 2001 el CONAFE reorienta el servicio educativo que presta a las comunidades rurales, hacia una propuesta pedagógica sustentada en el. desarrollo de competencias, en la *Guía para el Instructor Comunitario MEIPIM* (Garduño, Guerra, González, Rodríguez y Silva, 2001: 21) se precisan seis aspectos que se pueden observar en las niñas y los niños que se les educa con base en las competencias, a saber: interesarse por conocer más; actuar de manera más decidida y eficaz; atreverse a hacer cosa nuevas; tener confianza en sí mismo y en que puede aprender; convivir mejor con los demás en un marco de valoración de lo diferente; reconocer situaciones pasada, para resolver adecuadamente otras nuevas. Puede observarse que las cuatro primeras refieren a actitudes, la quinta a valores y solamente en la última puede vislumbrarse una traza relacionada con el conocimiento (posiblemente disciplinario-curricular). Indiscutiblemente, difícilmente se estaría en desacuerdo con estas aspiraciones, pero, la pregunta de base es: ¿qué debe hacer la escuela para que en los niños y las niñas se observen las mencionadas actitudes y valores? A la que se adiciona: ¿cuáles son los conocimientos que debe priorizar la enseñanza?

En el *Programa de Educación Preescolar 2004*, difundido recientemente se define a la competencia en franca concordancia con lo definido por Perrenoud y Nogueira, como: "un conjunto de capacidades que incluye conocimientos, actitudes, habilidades y destrezas que una persona logra mediante procesos de aprendizaje y que se manifiestan en su desempeño en situaciones y contextos diversos" (SEP, 2004: 22). Sin embargo, entre los efectos y comentarios que esta definición está causando entre las educadoras se advierten algunas ideas incompletas o equivocadas; así por ejemplo, las docentes empiezan a asumir que: "el nuevo programa es por competencias" y cuando se les pregunta qué quiere decir esto, en sus respuestas se evidencian significados erróneos (y riesgosos); lo importante, dicen, es que: "los niños aprendan las competencias y no los contenidos" (interpretación parecida a la que hicieran los Países Bajos). Al respecto, Fuenlabrada (2005) expresa que: las competencias no son susceptibles de ser 'enseñadas' -en su connotación tradicional escolar de ser transferidas a los niños a través de 'la información'-; más bien, se trata de propiciar en el aula el desarrollo de competencias, pero lograrlo, es una consecuencia de las estrategias de enseñanza que se movilicen en el aula.

Es decir, mientras los docentes no tomen conciencia que **los procesos de enseñanza son la componente fundamental en la consecución de la aspiración de desarrollar competencias en los niños,** se pone en entredicho la intencionalidad de los programas [de preescolar] que asumen dicha pretensión corriéndose así el riesgo de reducir los objetivos de la educación, a una declaración de 'buenos deseos', como sucediera en la experiencia vivida en Austria.

En este sentido Fuenlabrada continúa diciendo: si la enseñanza se plantea como se realizaba en la llamada escuela tradicional en la que el maestro es "el que sabe" y su función es transmitir información a los niños, seguiremos sin darles la oportunidad de desarrollar competencias. Porque en este esquema, el maestro *da* la información[7], los niños escuchan y su única posibilidad de participación es repetir lo que el maestro diga (enseñanza enciclopedista). Y, cuando los niños dan muestra de no entender o de no retener mucho la información recibida, el maestro comienza a hacer que la repitan hasta que aparentemente la aprenden; entonces, el maestro piensa que el objetivo de enseñanza se ha logrado. Esta forma de conducir la enseñanza se vuelve incluso, en ocasiones, exageradamente directiva; se plantea a los niños no sólo lo qué deben hacer sino cómo habrán de hacerlo, aún en detalles tales como: "con rojo", "con rayita", "sin salirse del cuadrito…".

Lo más preocupante, es que el mensaje efectivo que los niños reciben desde esta forma de enseñanza es que no saben, lo que piensan tiene poca importancia y tampoco pueden actuar intelectualmente por sí mismos. Conforme pasan los años en la escuela, se acostumbran a no pensar o a pensar poco (en el aula), van restringiendo sus maneras de responder porque cuando quieren hacerlo y se permiten cualquier desviación a lo dicho por su maestro no les va muy bien.

Así, lo que prioritariamente están aprendiendo es que para sobrevivir en el sistema educativo hay que detectar exactamente lo que el maestro quiere y hacerlo, estén o no de acuerdo con ello; esas eran hasta la década de los ochenta, las reglas de juego aceptadas y reconocidas en la mayoría de las aulas. Desgraciadamente, dichas prácticas todavía se siguen observando en los salones, después de diez años de implementada la reforma de modernización de la educación de 1993, cuyo enfoque metodológico ha pretendido reconvertir las prácticas docentes dominantes, a través de la asunción de un proceso de enseñanza que parte por reconocer a los niños como sujetos capaces de resolver por sí mismos con estrategias no formales diversas situaciones problemáticas; para que con base en éstas y con una intervención didáctica adecuada se propicie el tránsito de esas estrategias hacia aquellas que la matemática ha elaborado para resolver de manera eficiente y eficaz los distintos problemas.

2. El desarrollo de las competencias y su relación con los recursos para la enseñanza y el aprendizaje.

El logro de las multicitadas competencias, como viene dicho, está en función de una nueva **concepción del aprendizaje** y, por tanto, de **la forma** en la que se dé **la enseñanza;** no se pueden, realmente, desarrollar competencias de otra manera.

Qué deben hacer los maestros: ¿para atender las recomendaciones de los teóricos que postulan como objetivo de la educación el desarrollo de competencias?, es decir: ¿para que los niños en su tránsito por la escuela **aprendan a actuar de manera eficiente y eficaz** frente a las diversas situaciones en la vida?, ¿para que los niños utilicen, integren y movilicen los conocimientos aprendidos?, ¿para que los niños movilicen y pongan en práctica el bagaje cultural que la escuela les ha proporcionado? Es evidente que la sola información de conocimientos social y culturalmente validados, aprendidos a través de la memorización es insuficiente para lograr tan deseables objetivos, se hace necesario que las estrategias de enseñanza que los maestros implementen en su salón de clase propicien sistemáticamente que los niños usen y asocien varios recursos cognitivos prioritariamente frente a las situaciones que les resulten un reto intelectual, esto es, aquellas que en principio no sepan como resolverlas.

Para posibilitar y favorecer el desarrollo de competencias, es importante, entre otras cosas, que los maestros -como se señala en el enfoque metodológico de la Propuesta vigente-, reconozcan que: **en el proceso de aprendizaje** para resolver un problema, se considera una acción exitosa, la sustentada en conocimientos informales (el conteo para resolver problemas aditivos en el rango numérico de los primeros números, por ejemplo) y no necesariamente en la aplicación de una resolución convencional – el uso de las operaciones de suma y resta- “enseñadas” por ellos, antes de que los niños tengan la oportunidad de pensar cómo pueden resolver problemas, con sus propios conocimientos y echando mano de sus experiencias escolares y extraescolares.

No ofrecer esa oportunidad a los niños, tiene en el futuro consecuencias graves que van más allá de su posibilidad de apropiarse de conocimiento matemático útil; la consecuencia grave radica en que, en los hechos, a los niños en su paso por la escuela se les hace creer que son incapaces de pensar; que frente a un problema deben esperar las indicaciones de “otro que sí sabe” (su maestro en la escuela, posteriormente su jefe en su vida adulta, por ejemplo) coartándose poco a poco su iniciativa y seguridad.

La propuesta didáctica

En concordancia con lo expuesto, en los párrafos precedentes, es que en la resolución didáctica del Programa de Matemáticas vigente para la escuela primaria, se observa que los problemas no son el espacio para “aplicar y ejercitar” la operatoria, como se había concebido en propuestas educativas anteriores a la actual, sino que aparecen con tres intencionalidades diferentes: a) para iniciar el proceso de aprendizaje y propiciar el acercamiento de los niños al significado del conocimiento que se pretende adquieran; b) para formalizar el uso de las operaciones como estrategias de solución más eficientes y eficaces que las propias (las informales); c) para profundizar y enriquecer el conocimiento.

Sin embargo, esas intencionalidades no son suficientes para favorecer el aprendizaje matemático de los niños si sus maestros no les permiten la exploración de posibles caminos de solución. De no darles esta oportunidad se está obstaculizando que se ejerciten en la elección de una estrategia que les permita actuar (con éxito o sin él -esto en principio tiene poca importancia-) frente a una situación que les resulte problemática.

Lo que se necesita para favorecer el desarrollo de sus potencialidades a constituirse posteriormente en competencias, es que empiecen a reconocer que frente a un problema, lo que **se espera de ellos es que traten de resolverlo, que estén dispuestos a buscar una solución, que asuman que son capaces de encontrarla y no, que esperen a que otros les den indicaciones sobre cómo deben actuar**; sólo así estarán en situación de aprender a utilizar, integrar y movilizar sus conocimientos; de hecho en esa búsqueda de solución personal o compartida con sus pares se ven en la necesidad de usar y asociar varios recursos cognitivos complementarios.

También en el enfoque metodológico que sustenta a la Reforma educativa, que nos ocupa, se sugieren otras componentes didácticas que favorecen el aprendizaje, no menos importantes que lo asentado para los problemas, que refieren a la organización de los niños para la realización de las actividades, a saber: a) el trabajo en parejas y en equipos para dar lugar al intercambio de saberes y experiencias entre los niños; b) a la puesta en común frente al grupo de los resultados obtenidos, para propiciar la expresión y defensa frente a otros, sobre las propias apreciaciones de la situación y la manera de resolverla.

Cabe señalar que estas componentes didácticas no sólo favorecen el aprendizaje matemático de los niños sino que propician el desarrollo de competencias como: tener confianza en sí mismo y en que puede aprender de los demás, convivir mejor con los otros escuchando sus puntos de vista sin detrimento de las propias ideas, desarrollar sus posibilidades de argumentación, entre otras.

Por otro lado y particularmente, en el trabajo con el Libro de Texto Gratuito (LTG), se incorpora lo que Block y Fuenlabrada (1995,1996) han definido como la imagen didáctica; esto es, las ilustraciones si bien cumplen su cometido de hacer atractivos a los libros para los destinatarios, están diseñadas para que interactúen con ellas, obtengan la información que necesiten en función de lo que las lecciones les plantean y en caso de que lo consideren conveniente les sirvan de apoyo a sus razonamientos.

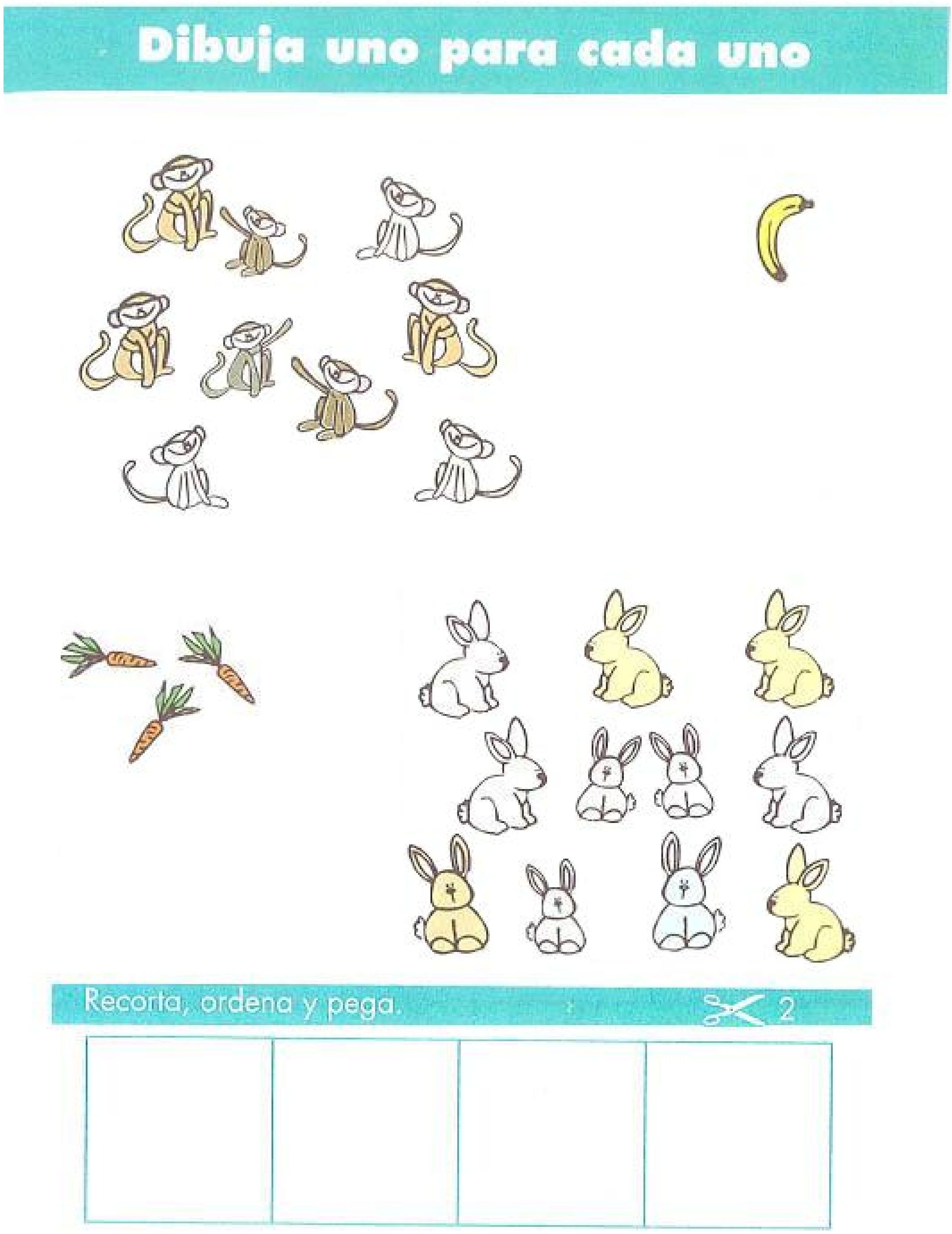
A. Las colecciones, su numerosidad, el conteo, los significados de los números.

En el primer año, lo que se propone para el desarrollo de la línea conceptual de *Los números, sus relaciones y operaciones*, son diversas situaciones para que los alumnos vayan reconociendo para qué sirven los números, cómo se simbolizan, cómo se ordenan en una serie, a la vez que van encontrándose con los distintos significados del número: como cardinal ¿cuántos elementos tiene una colección? (Santiago tiene 5 canicas); como ordinal ¿qué lugar ocupa un elemento en una colección ordenada con base en ciertos criterios? (Geny quedó en quinto lugar en la carrera); y su uso nominativo como etiqueta para identificar elementos de una colección (Mario tiene en su camiseta el número 7 en el equipo de fútbol). También van teniendo experiencias que les permiten reconocer al conteo como una estrategia más económica que la correspondencia uno a uno que se puede establecer entre los objetos de dos colecciones.

Al respecto cabe precisar que la correspondencia uno a uno es un recurso espontáneo (los maestros no tienen que “enseñarla”) que utilizan los niños para comparar o igualar colecciones, de la cual echarán mano cuando empiecen a contar porque en el proceso de conteo es necesario poner en correspondencia uno a uno, los nombres de la serie numérica oral (uno, dos, tres, cuatro, cinco, etc.) con los objetos de la colección que se quiere cuantificar.

Veamos a través de un ejemplo cómo se realiza lo dicho en el párrafo precedente:

- En la Lección 5 *Dibuja uno para cada uno* del LTG 1°, se plantean dos situaciones para que los niños formen colecciones con la misma cantidad de objetos. La consigna es que los niños dibujen un plátano (o una zanahoria) para que a cada chango (o conejo) le toque uno.



Algunos maestros, que seguramente no será ninguno de los lectores de este artículo, creen reconocer en esta lección un ejercicio de correspondencia uno a uno, desde la perspectiva de las lecciones que antes aparecían en los libros. Así piensan que, de lo que se trata es que queden las dos colecciones de changos y plátanos (o conejos y zanahorias) emparentadas por unas rayitas que relacionan a los elementos de una colección con los de la otra; en todo caso, la única diferencia con las lecciones de los libros anteriores, es que los niños tienen que dibujar los elementos de una de las colecciones. Esta interpretación equivocada del objetivo de la lección da lugar a que estos maestros ofrezcan a los niños "sugerencias de solución" para que "resuelvan" la lección, así les dirán cosas como:

> Tenemos que dibujar un platanito para cada changuito, así que para que nos quede bonito vamos haciéndolo en orden.
> ¿Ya se fijaron que ya tenemos un platanito?, bueno,…, vamos a dárselo a un changuito, al que ustedes quieran.
> Escojan uno y trazamos una rayita desde ese changuito hasta el platanito.
> Ahora escojan otro changuito, ¿ya?, trazamos una rayita hasta el otro cuadro,…, en donde vamos a dibujar los platanitos.
> Fíjense de no pasar las rayitas sobre los changuitos, porque luego no vamos a saber cuál es el platanito de cada changuito.
> ¿Ya terminaron?, bueno,…, sigan haciendo lo mismo con los otros changuitos.

Mientras los niños siguen trazando rayitas y dibujando platanitos, esos maestros se ocupan de asegurarse que los niños no hagan demasiado lío con las rayitas y los ayudan en caso necesario. Entonces quizá frente al relajo de rayitas organizado por los niños, los maestros opten por proponerles que "resuelven un problema de resta planteado a cuenta gotas" y, sin previo aviso, empiezan a preguntarles:

> Vamos a contar los conejitos, ¿cuántos hay?
> Ya tenemos unas zanahorias, ¿cuántas son?
> Entonces, ¿cuántas zanahorias tenemos que dibujar?

Los niños dicen varias cantidades: nueve, diez, once; pero alguien por ahí grita ocho, como esto es lo que esperaba oír el maestro, llama la atención de los niños:

> ¿Ya escucharon a Lalito?
> ¿Cuántas zanahorias hay que dibujar Lalito?
> Sí, ¡tenemos que dibujar ocho zanahorias!
> ¡Dibújenlas en el cuadrito donde están las zanahorias!

Para los alumnos de esos maestros, la actividad se redujo al dibujo de plátanos y zanahorias, el trazado de rayitas y en el mejor de los casos, para varios niños hubo una pequeñísima experiencia de conteo de conejos y para otros, muchos menos que los que pudieron contar, tuvieron la oportunidad de resolver el cálculo de la diferencia entre el 11 y el 3. Con la salvedad que contaron y calcularon por solicitud del maestro pero no porque ellos hubieran decidido que contar y calcular es una manera, entre otras, de resolver.

En cambio, si los maestros se limitan a plantear a los niños la situación y se aseguran de que les quede claro que tienen que dibujar un plátano para cada chango (o una zanahoria para cada conejo) y solamente uno, no dos ni tres. Esta lección la pueden resolver incluso los niños que todavía no saben contar en rangos numéricos pequeños; o, quienes pudiendo hacerlo todavía no reconocen que el conteo es una estrategia útil para resolver este problema.
Los niños que se encuentran en estos casos, si se les deja en libertad para resolver la lección, seguramente como sucediera en la experiencia realizada por Rangel[8], harán, una marca en cada uno de los changos a la vez que dibujaron un plátano (correspondencia uno a uno) cerca o lejos de él, pero a ninguno se le ocurrió trazar rayitas entre los changos y los plátanos. En ese estudio también se reporta lo que hicieron los niños que decidieron recurrir al conteo, salvo dos casos que se equivocaron en el conteo de los conejos porque su rango de dominio andaba por el nueve o diez, el resto contó bien.

Algunos resolvieron conforme a “lo esperado”, es decir dibujaron 7 plátanos y 8 zanahorias; otros hicieron 8 plátanos y 11 conejos, parecía que se habían equivocado y sólo cuando comentaron sus resultados se aclaró que para ellos el plátano y las zanahorias que aparecen en la lección los consideraron como modelos de los dibujos que tenían que hacer. Hubo además un caso de una nena que dibujó para los changos solamente tres, su explicación fue: “sólo le di plátanos a los [changos] que tenían levantada la manita”.

Estas maneras de proceder de los niños frente a una situación evidencian realmente lo que pueden hacer, cuáles son sus posibilidades para echar mano de la correspondencia uno a uno en situaciones de igualación de cantidades, cuáles son los recursos gráficos que tienen para expresarla, si saben o no contar y las distintas interpretaciones que pueden hacer de la información gráfica, como lo es: utilizar o no los dibujos como modelos y la genialidad de darle plátanos solamente a los changos “que querían”.

Pero, fundamentalmente, es necesario destacar en primer lugar, la distancia que hay entre el trabajo intelectual realizado por estos niños de aquellos a quienes su trabajo se ve reducido al trazado de líneas y al dibujo, por una equivocada intervención de sus maestros.

Y en segundo lugar, que esta lección es **una versión** (entre otras) de un tipo de problema aditivo: de igualación de colecciones. Es decir, la situación que tienen que resolver los niños en la lección 5 del LTG 1°, está presentada en apego a sus posibilidades cognitivas y a los conocimientos que tienen en ese momento disponibles para actuar (la correspondencia uno a uno o **el conteo apoyado en una representación gráfica**); posteriormente podrán resolver esa misma situación presentada de otra manera; resolverán el mismo problema planteado a través de un texto del tipo:

> Verónica tiene 11 conejos, todas las mañanas les da una zanahoria a cada uno. Pero el lunes Verónica nada más tenía 3 zanahorias. ¿Cuántas zanahorias le faltan a Verónica para darle de comer a los conejos?

Expresado el problema de esta manera los niños lo resolverán, hacia finales del primer grado, por complemento aditivo[9]: a partir del tres, cuentan cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez, once; a la vez que controlan (con los dedos, por ejemplo) lo que van agregando, la colección que les resulta la vuelven a contar para encontrar que son 8 zanahorias las que le faltan a Verónica. Muy tardíamente hacia finales del tercer grado, es que empiezan a reconocer que **la resta** (11-3) **es la operación** que es útil (que sirve) para resolver problemas de este tipo.

B. La enseñanza aparentemente "tardía" de los números y las cuentas.

En el LTG de 1° además de los problemas "camuflajeados" (como el analizado de la lección 5), aparecen otros aditivos e incluso multiplicativos[10], expresados de maneras más reconocibles (como tales) para los maestros. Se espera que los niños resuelvan estos problemas –que involucran cantidades pequeñas-, usando **de manera pertinente** el conteo de colecciones (recurso informal) y no las operaciones. Ésta es una de las razones, entre otras que se discutirán más adelante, por la cual esos problemas se plantean antes de que aparezcan las operaciones de suma y resta que vienen a ser los recursos convencionales para resolver los problemas aditivos, estas operaciones se formalizan hasta el segundo año; mientras que, la multiplicación entre dígitos[11] empieza a aparecer en su expresión simbólica (a x b) al término de este grado y la presentación del algoritmo usual para números mayores al diez se realiza en el tercer año; la división formalmente se trabaja hasta el cuarto grado.

Respecto a la escritura habitual de los números, más o menos hasta el 15 aparecen inicialmente como "etiquetas", mientras que los niños empiezan a escribir los números mayores en el segundo semestre del primer grado y no al inicio de éste como se proponía en las propuestas educativas anteriores a la de 1993.

La razón que sustenta a la "tardía" formalización de la operatoria y también a la representación de los números de dos o más cifras se encuentra en la pretensión de que los niños no solamente se apropien de los símbolos y las reglas del lenguaje matemático sino que aprendan qué representan estos símbolos y qué tipo de procesos regulan esas reglas. Este defasaje en la formalización de la simbolización sigue preocupando a los maestros que piensan que aprender matemáticas en la escuela primaria, es equivalente a aprender los números y las operaciones, y desde esta perspectiva, les parece que la Propuesta "está mal" y deciden enseñar los números y las cuentas antes del momento sugerido. Aunque realmente sólo están **informando** a los niños cómo se escriben los números a través de la escritura repetida de la serie numérica y respecto a la operatoria, lo que hacen para enseñar la suma, por ejemplo, es decirles a los niños cómo va la regla y hacer que la mecanicen: los números que se van a sumar se escriben uno abajo del otro, encolumnados, se calcula de derecha a izquierda, etc. Esta manera de concebir la enseñanza enfrenta prematuramente a los niños con un trabajo simbólico carente de significado para ellos, aunque desde la perspectiva de sus maestros "es lo suficientemente claro" y tiene sus implicaciones posteriores en la relación que los alumnos establecen con esta área del conocimiento, de la que no quieren saber nada por considerarla confusa, sin sentido e inaccesible.

El lenguaje matemático, ciertamente es inherente al conocimiento de la disciplina, pero a todo lenguaje le compete una parte sintáctica (símbolos y reglas) y una parte semántica (lo que representan esos símbolos y esas reglas), de éste último aspecto se ocupó poco la

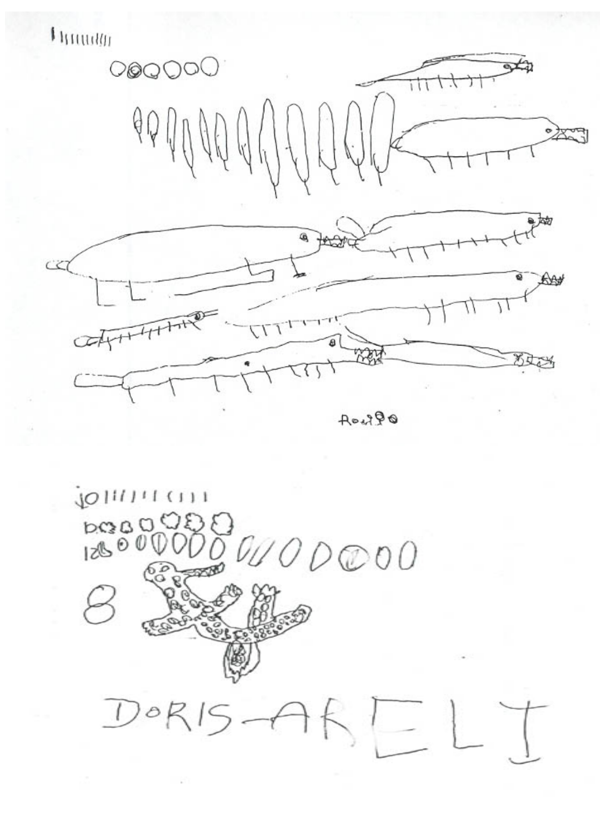
enseñanza y consecuentemente hubo repercusiones en el aprendizaje matemático de los niños. En los lineamientos actuales se pretende subsanar esta deficiencia.
Aunado a ello, los maestros no pueden perder de vista que una de las funciones del aprendizaje de todo lenguaje está en su posibilidad de que los usuarios puedan a través de él, recibir y dar información. Por esto, antes de la aparición de la simbología matemática formal, los niños tienen que tener experiencias de comunicación mediante producciones gráficas elaboradas por ellos, ya sea que éstas refieran a la numerosidad de las colecciones, a la expresión de procesos, o a la realización de cálculos, entre otras.

C. La representación de las cantidades que precede a la representación de los primeros números.

Antes de abordar la resolución de problemas, el trabajo sobre el sistema de numeración decimal y la incorporación de la operatoria, revisemos primero la siguiente situación, a fin de ejemplificar lo que comunican los niños a través de una producción gráfica cuando se ven en la necesidad de representar la numerosidad de diferentes colecciones.

- En la Ficha *La tarea* del *Fichero de Actividades Didácticas. Primer grado*, a los niños se les pone en situación de representar gráficamente la numerosidad de diferentes colecciones.

En Fuenlabrada (2001) se reportan los casos de Rodrigo y de Doris, a quiénes su maestra les solicitó que tomaran nota sobre un material que tendrían que llevar al día siguiente para hacer una maqueta. El material solicitado fue 10 palitos, 6 piedritas, 12 hojas y 8 cocodrilos. La maestra les dice que pueden hacer la nota como ellos quieran, lo importante es que cuando la lean sepan qué es lo que tienen que llevar.



Como puede observarse ambas producciones son unas “buenas notas” de lo que la maestra pidió. Cabe aclarar que Rodrigo, **sabía escribir los primeros números si estos le eran solicitados explícitamente,** sin embargo en esta ocasión escribir 10, 6, 12, 8 no son marcas gráficas lo suficientemente claras (para él) para representar la cantidad de elementos de las colecciones; se decide por el dibujo y logra representar con éste tanto la información cualitativa como la cuantitativa de las colecciones. Por su parte, Doris nos muestra que sabe escribir los números correspondientes a las cantidades del material solicitado y además le parece que puede usarlos.

Pareciera, que Doris está “duplicando” la información en la representación de los 10 palitos, las 6 piedritas y las 12 hojitas, y que podría haber resuelto de manera más económica como lo hizo con los 8 cocodrilos. Sin embargo esto no es así, Doris como muchos niños de su edad (o próximos a ésta) en situaciones análogas, no les es suficiente con escribir un número y agregar el dibujo de uno de los objeto de la colección. Lo que realmente le pasó a Doris con los cocodrilos es que fue tan elaborado su dibujo que ya no hizo los demás, pero de haber hecho un cocodrilo más simple, seguramente habría dibujado los ocho, como lo hizo Rodrigo. En sentido estricto tanto para Doris como para Rodrigo, los símbolos numéricos, en este momento del proceso de su aprendizaje, todavía son suficientes para **comunicar** la cantidad de elementos de una colección.

Es necesario que los maestros reflexionen sobre los siguiente: las producciones gráficas de Doris y de Rodrigo fueron posibilitadas por su maestra, porque al darles la consigna no les dejó ver cómo quería que lo hicieran (número-dibujo, sólo dibujos, número-palabras, etc.), se limitó a dejarles claro que la función de sus anotaciones era que viéndola pudieran saber (recordar) lo que tenían que llevar al día siguiente.

Los niños, aproximadamente a los 6 años y medio, empiezan a comprender que en representaciones como la de Doris para los 8 cocodrilos, efectivamente se está comunicando que “hay ocho cocodrilos”. Este avance conceptual es un insumo necesario para la comprensión de la representación de los números mayores. Pero esto nos induce a revisar lo que se sugiere en la Propuesta para el trabajo sobre la manera en la que habitualmente se escriben los números.

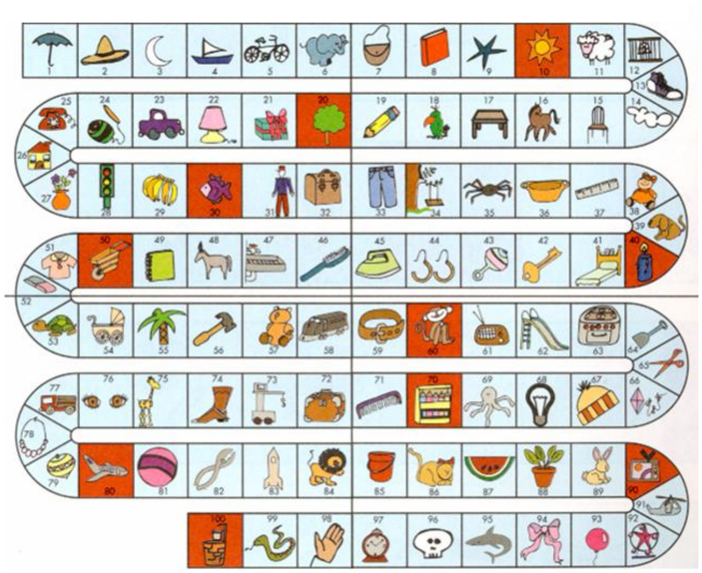
D. El sistema de numeración decimal.

El aprendizaje del sistema de numeración decimal (SND), corre alternadamente con la búsqueda de solución a problemas aditivos y multiplicativos, que como se señalara anteriormente, se espera que los niños resuelvan utilizando el conteo.

El trabajo sistemático sobre las reglas del sistema de numeración que se sugiere en la Propuesta propicia que los niños comprendan las reglas de cambio de los agrupamientos de diez (diez unidades se cambian por una decena, diez decenas se cambian por una centena, etc.) y el valor posicional de las cifras (en el 53, el 5 representa cinco decenas mientras que en el 135, el 5 representa cinco unidades). Ambas reglas –la de agrupamiento y posición- y el conocimiento del valor de diez símbolos numéricos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9), es lo que permite la comprensión de la escritura simbólica de los números.

Los recursos didácticos que se sugieren para la comprensión de la escritura de los números en el contexto de un sistema simbólico, son fundamentalmente el trabajo con *El Caminito* (*Material recortable. Primer grado*) y la realización del juego *El Cajero* (*Fichero de Actividades Didácticas. Primer grado*). El trabajo con ambos se sostiene durante los dos primeros años de la escuela primaria, para dar lugar a la escritura con sentido de los números y a la presentación de los algoritmos de suma y resta; en tercero y cuarto se trabaja con el SND circunscrito a la formalización de los algoritmos de multiplicación y división de números mayores; en quinto y sexto se compara el sistema de numeración decimal con otros sistemas antiguos como el egipcio y el romano para que los niños reflexionen sobre las semejanzas y diferencias que hay en los tres sistemas y reconozcan las ventajas que tiene el SND sobre los otros, al posibilitar algoritmos de cálculo en el nivel de lo simbólico más sencillos que los que pudieran realizarse con los otros sistemas de numeración: el egipcio y el romano.

El Caminito como puede observarse en la ilustración que se muestra, está formado por 100 casilleros; cada uno con dos indicadores que permiten a los niños identificarlos: un dibujo y un número. Los casilleros correspondientes a las decenas (diez, veinte, treinta,…, cien) tienen un fondo rojo, los otros son azules.



Hay varias actividades que se realizan con él, revisarlas no interesa a los propósitos de este artículo, salvo mencionar lo siguiente:

El Caminito es una expresión gráfica y accesible para que los niños empiecen a familiarizarse con el orden de la serie numérica. No es lo mismo que los niños al comparar dos colecciones, lo hagan por correspondencia uno a uno entre los elementos de éstas, a que la correspondencia esté mediada por el caminito al colocar los objetos de cada colección en los casilleros y ver con cuál de las dos colecciones se avanza más, en este proceso van confirmando la hipótesis: dado un número en la serie, los anteriores a este representan cardinalidades de colecciones menores y los posteriores corresponden a la cardinalidad de colecciones con más elementos que la colección relacionada con el número elegido. Esta situación propicia incluso que de manera natural los niños encuentren la diferencia entre las cantidades de elementos de las colecciones que se comparan: "te gané por cuatro", dicen por ejemplo.

A lo anterior se adiciona que la función de los dibujos en los casilleros permite la realización de actividades con la serie numérica de números mayores a 10, aún cuando los niños todavía no los reconozcan simbólicamente y estén todavía en el proceso de aprender la serie numérica oral de los primeros cien números.

Hay referente empírico Fuenlabrada, Rangel, Valencia[12], que muestra cómo los niños al trabajar con *El Caminito*, empiezan a recurrir al conteo para identificar los números escritos. Por ejemplo, pueden decir que llegaron al caballo y no reconocer al 16, pero como el aprendizaje de la serie oral la dominan antes que la serie escrita, recurren al conteo de los casilleros desde el inicio del camino para averiguar el nombre del número (dieciséis) en el que está el caballo.
Espontáneamente empiezan a referirse a los números de los casilleros (y no a los dibujos) en el rango numérico que dominan, así aparecen expresiones: "Tania llegó al nueve, Jimena al doce y yo al árbol". O bien, empiezan a relacionar a las cantidades con el orden de los números, cuando dicen: "yo tenía más [objetos en mi colección] que tú porque llegué más lejos [avancé más en el caminito]".

Posteriormente cuando reconocen los primeros agrupamientos de diez y su nombre (diez, veinte, treinta, cuarenta, etc.) al avanzar en *El caminito*, ya no cuentan de uno en uno sino de diez en diez, por ejemplo, para localizar el sesenta y dos (representado con seis fichas rojas y dos azules[13]), cuentan los casilleros en fondo rojo y van diciendo: diez, veinte, treinta, cuarenta cincuenta, sesenta, sesenta y uno, sesenta y dos.

Las actividades que los niños realizan con *El Caminito* favorece el reconocimiento de las regularidades tanto de la serie numérica oral como la escrita. Sin embargo, que los niños puedan averiguar cómo se llama el número "25", recorriendo los casilleros y enunciando la serie de los números, no significa que sepan porque "el veinticinco" se escribe con un "2" y con un "5" y como tampoco que "25" no es lo mismo que "52". Para comprenderlo necesitan, como se dijo anteriormente, trabajar con las reglas de agrupamiento y posición del sistema de numeración decimal. Y esto se funcionaliza a través de las actividades realizadas con el juego de *El Cajero*, en el que se usan fichas azules, rojas, amarilla (si se quiere trabajar con números hasta de tres cifras), a las que se les dan valores diferentes; además se establece una regla de cambio de fichas:

> Diez fichas azules valen lo mismo que una ficha roja;
> Diez fichas rojas valen lo mismo que una ficha amarilla.

Lo que significa que: cuando se reúnan 10 fichas azules (diez unos), éstas **se deben** cambiar por una roja (un diez) y cuando se junten 10 fichas rojas (diez dieces), éstas se deben cambiar por una amarilla (un cien).

La interacción de los niños con las leyes del sistema de numeración decimal les proporciona, por un lado, elementos para acceder al conocimiento de las razones que explican la escritura de los números, al mismo tiempo que les posibilita el control de la manipulación simbólica de los algoritmos de las operaciones. Es decir, la propuesta para la enseñanza tanto de la escritura de los números como de la operatoria procura el conocimiento de las funciones y las leyes que constituyen a un sistema simbólico.

El juego del *El Cajero* se realiza en equipos. Un de los niños hace de cajero y recibe todas la fichas, los niños por turnos tiran un par de dados.
En El Cajero ascendente los jugadores una vez lanzados los dados piden al cajero tantas fichas azules como puntos señalen los dados. Gana el primer jugador que logre reunir una cantidad de fichas preestablecida, por ejemplo: una amarilla y dos rojas.

Los niños siempre reciben del cajero fichas azules para obtener una ficha amarilla y dos rojas, durante el juego se ven en la necesidad de ir cambiando con el cajero fichas cada vez que reúnen diez de un mismo color. En caso de que no lo hagan así (porque les guste tener "muchas" fichas), el maestro debe recordarles las reglas del juego.

En *El Cajero* descendente, cada jugador recibe del cajero al inicio del juego una cantidad de fichas. Por turnos los miembros del equipo tiran el dado y entregan al cajero, la cantidad exacta de fichas azules que estos indiquen. Gana el primer jugador que se deshaga de sus fichas**.**

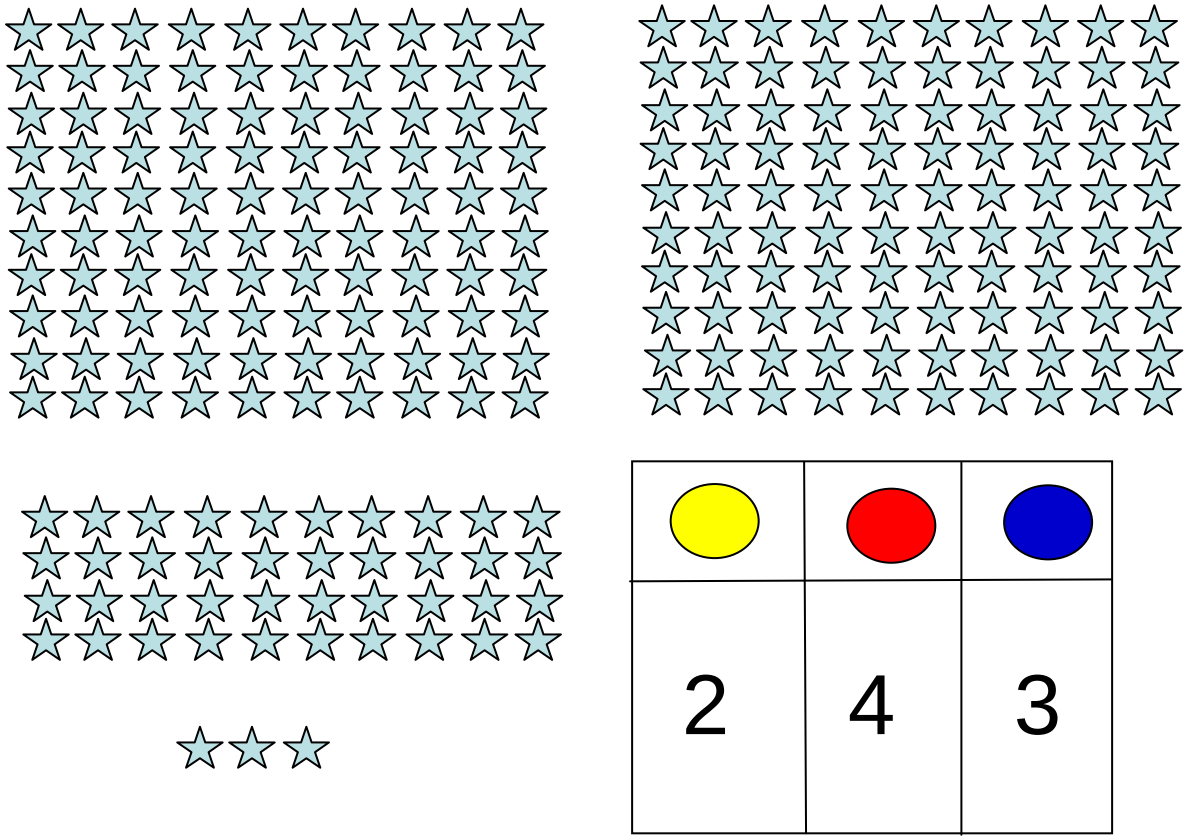
Esto implica que cuando un jugador no tiene suficientes fichas azules se ve en la necesidad de cambiar con el cajero (por ejemplo: una amarilla por diez rojas y luego una o dos de estas rojas por 10 azules) para que pueda entregar lo que los dados indicaron.

El Cajero ascendente favorece que los niños trabajen informalmente con los procedimientos de agrupar que se necesitan para la resolución de los algoritmos convencionales de suma; mientras que *El Cajero* descendente permite que los niños trabajen implícitamente con la resta, al ir desagrupando.

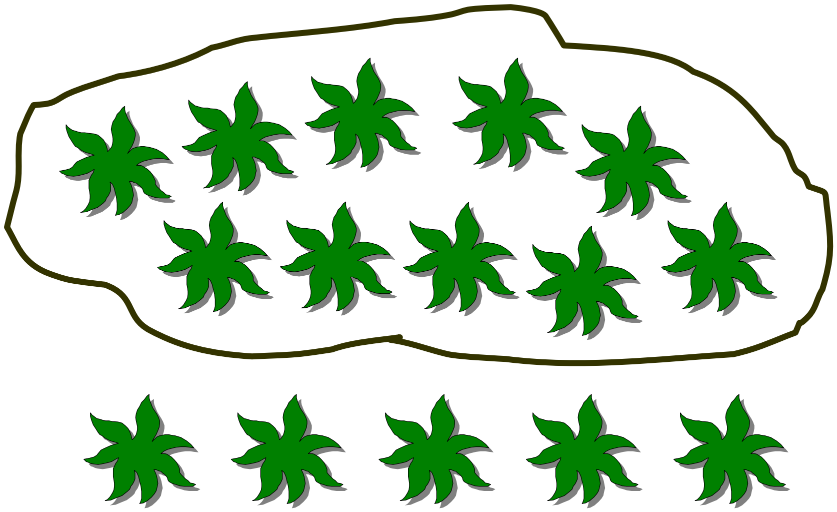
Esta regla de cambio realizada posteriormente con el apoyo de una Tabla –de tres columnas, en cuyos encabezados de izquierda a derecha aparecen un circulo amarillo, uno rojo y uno azul-, posibilita hacia el segundo semestre del primer grado, el reconocimiento de los agrupamientos que componen el sistema (los cienes, los dieces, y los unos) y su vínculo con la escritura (posicional) de los números.

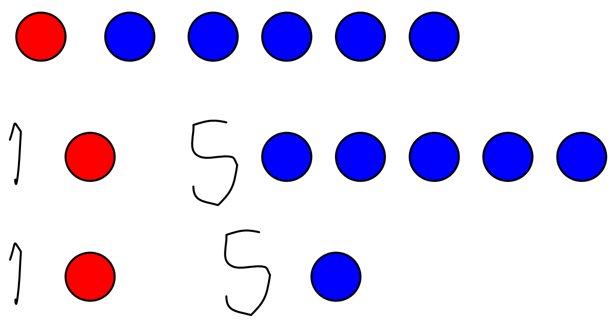
En la Tabla se registra en cada columna, la cantidad de fichas de un mismo color (de un mismo valor: unos, dieces y cienes), que quedan después de haber realizado todos los cambios posibles.

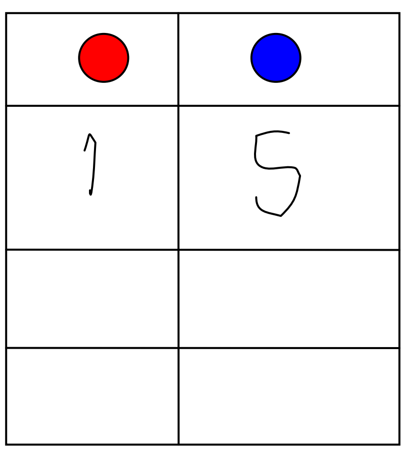
Por ejemplo, si se tuvieran inicialmente doscientos cuarenta y tres fichas azules, se hacen todos los grupos posibles de diez fichas azules, luego se cambian diez azules por una roja, y se encuentra que resultan veinticuatro fichas rojas y quedan 3 azules (que ya no se pueden cambiar por una roja), este número se anota en la columna de las fichas azules. Nuevamente se aplica la regla de cambio -con las fichas rojas- y se obtienen 2 amarillas y quedan 4 rojas (que no son suficientes para cambiar por una amarilla). En la columna de las fichas rojas se escribe el número 4 y en la de las amarillas el 2; lo que da lugar a la representación simbólica del doscientos cuarenta y tres, como se aprecia en el siguiente gráfico.



En el tránsito de los niños, desde que forman agrupamientos de diez objetos con material, hasta que aparecen los números representados convencionalmente, hacen uso de diferentes registros, como puede apreciarse a continuación:



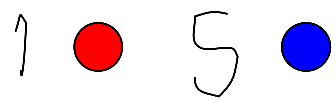




1 5

Una primera consideración es que para muchos maestros, registros equivalentes al mostrado de los agrupamientos de las hojitas son suficientes para que los niños escriban el número 15 mediado por la explicación: “hay un grupo de diez, se pone el uno, para señalar que hay un decena, y se escribe el 5 por la cantidad de hojitas que quedaron sueltas”, y les parece ocioso que los niños realicen el juego de *El Cajero* ascendente y descendente, pero esto anula el aprendizaje de la regla de cambio, que como se verá más adelante da sentido a los algoritmos de suma y resta en los que: “no se pide prestado” sino que “se agrupa”; como tampoco, “se pide prestado” sino se “desagrupa”.

Cuando se analizaron los registros de cantidades de Rodrigo y de Doris, se anticipó que los niños, en sus primeras producciones gráficas sobre la numerosidad interpretan que en la representación de Doris para los 8 cocodrilos: hay un “ocho” que pueden leer, pero como sólo hay un cocodrilo faltan otros (7) para que el registro sea “correcto”. Hasta que los niños aceptan que es suficiente con escribir el número que representa la cardinalidad y (solamente) un dibujo para informar sobre la cualidad de los elementos de la colección, es que producen sistemáticamente registros como el que aparece a continuación.



[Ya no consideran necesario dibujar cinco círculos azules]

Hasta entonces serán capaces de trabajar con soltura en el registro de cantidades en la Tabla, en la que, al anotar un número en una columna, el encabezado de ésta les indica de que color son las fichas. Para posteriormente comprender que la cualidad de los agrupamientos (unos, dieces o cienes) está determinada por **la posición**; por ejemplo, en el 367 se está diciendo que después de hacer los agrupamientos, quedaron 3 fichas amarillas (3 cienes), 6 fichas rojas (6 dieces) y 7 fichas azules (7 unidades).

E. De los recursos informales (el conteo, los dibujos) a la aparición de las operaciones como herramientas útiles para resolver problemas.

Antes de abordar los recursos de cálculo susceptibles de utilizarse como el conteo de objetos, conteo sobre un dibujo, cálculo mental, operaciones, para encontrar la resolución numérica demandada en los problemas aritméticos; es necesario comentar sobre la importancia que hace al aprendizaje de la matemática el que a los niños se les dé la oportunidad, cada vez que enfrentan un problema, de reflexionar sobre las relaciones semánticas que se pueden establecer entre los datos; para que con esto tengan claridad sobre lo que están buscando y bajo qué condiciones deben realizar esa búsqueda.

La relación entre los datos de un problema y la que éstos guardan con el dato desconocido, es un trabajo previo a la elección de un recurso de cálculo. Las prácticas tradicionales de enseñanza, han hecho creer a los niños que resolver un problema es relacionar a éste con una o varias operaciones que tienen que aplicar con los datos del problema, incluso esta relación se ve enfatizada con el esquema de solución de problemas: DATOS-OPERACIONES-RESULTADO que se observa en no pocos cuadernos de matemáticas.

En la Propuesta actual para la enseñanza se sugiere a los maestros que frente a las situaciones de enseñanza, cualesquiera que éstas sean (actividades, juegos, representaciones, etc.), permitan que los niños decidan qué es lo que consideran conveniente hacer para interactuar con ellas. Estudios recientes (Barriendos 2005, Martiradoni 2004), muestran cómo para muchos maestros todavía resulta difícil de aceptar o de imaginar que los niños puedan resolver problemas de suma, por ejemplo, sin que ellos les hayan enseñado a sumar; hay otros, que si bien aceptan las posibilidades de solución con recursos informales que tienen los niños para resolver problemas; argumentan sin embargo, que no vale la pena "que los niños pierdan el tiempo" si al final de cuentas se espera que resuelvan los problemas con los recursos convencionales (la operatoria). De antemano se asumen las dificultades que para los maestros supone la reconceptualización de ideas largamente aceptadas en el sistema educativo, pero no por ello podemos dejar de insistir en los beneficios al aprendizaje significativo de la matemática que un tratamiento distinto de los problemas puede posibilitar.

Con anticipación se señaló que la búsqueda de solución a problemas aditivos y multiplicativos se sugiere en la Propuesta educativa, antes de que se enseñen formalmente las operaciones; y que desde esta postura se espera que los niños los resuelvan con estrategias informales como el conteo, que es el recurso del que disponen para enfrentarlos y particularmente el que más aparece en las producciones de los niños. Desde luego que, para que el conteo aparezca como estrategia de solución se necesitan dos cosas: que los niños sepan contar colecciones pequeñas; y que los datos numéricos de los problemas que se les propongan involucren a los primeros números.

No todos los problemas que se resuelven con suma o restas resultan, como muchos maestros suponen, necesariamente más fáciles que los que implican a la multiplicación y la división. Tanto en los problemas aditivos como en los multiplicativos hay algunos más accesibles que otros; ésta es una de las razones, entre otras, por la que el currículo de matemáticas está organizado por líneas conceptuales y no por unidades temáticas, como sucedía en las propuestas anteriores, organización que suponía la posibilidad de un aprendizaje por "compartimentos" y no como un proceso evolutivo.

Cabe aclarar que si, por ejemplo, el concepto de número se ve disminuido a la escritura de los números y a la identificación de sus nombres o bien, el concepto que refiere a las estructuras aditivas, se reduce al aprendizaje de los algoritmos de suma y resta y a la aplicación de estas operaciones en problemas tipo (casi todos iguales) se puede organizar el currículo por unidades temáticas. En cambio, la perspectiva metodológica actual anticipa que si bien se puede identificar cuándo los niños empiezan formalmente a trabajar con los conceptos siempre, es posible trabajar con ellos y que los niños se los encuentren en situaciones más complejas, que amplían y profundizan a los conocimientos iniciales. Así, retomando los ejemplos anteriores, se encuentra que para los niños pequeños, el "tres" es un equivalente a "en sus marcas listo fuera", cuando les decimos a "la de tres empezamos"; después el "tres" representa la cardinalidad de una colección, luego es la relación aditiva de: uno, uno y uno, ó del dos y el uno, ó del cinco menos dos, del seis menos tres; la relación multiplicativa de: tres por uno, o del nueve entre el tres, etc. Por eso el Programa de 1993 organiza al currículo en líneas conceptuales, como *Los números sus relaciones y sus operaciones*, en la que los problemas, aparecen antes, durante y después de formalizadas las operaciones.

* Los problemas antes de la enseñanza de las operaciones, permite a los niños encontrarse con los significados diferentes de las operaciones, a través de la búsqueda de solución a diversos problemas. Los distintos significados de una operación se rastrean en los problemas distintos que son resueltos por esa operación.

Hacer un análisis de los distintos problemas aditivos y multiplicativos rebasa las pretensiones de este artículo, por lo que nos restringiremos a unos cuantos ejemplos que se enlistan a continuación, a fin de ilustrar las estrategias de conteo distintas que ponen en juego los alumnos para resolverlos.

> Federico tiene 6 coches chicos y 2 grandes. ¿Cuántos coches tiene Federico?
> Federico tenía 6 dulces, su hermana le regaló 2. ¿Cuántos dulces tiene ahora Federico?
>
> Erick tenía 6 pelotas, le regaló 2 a sus primos. ¿Con cuántas pelotas se quedó Erick?
> Erick quiere tener 6 estampas pero sólo tiene 2. ¿Cuántas estampas le faltan a Erick para tener las que quiere?

Para los niños estos problemas **son todos diferentes**, para ellos no tiene ninguna importancia que la matemática diga que los problemas de Federico se resuelven con la misma operación (la suma) y con los mismos números (6 y 2) y que a los problemas de Erick les sucede algo equivalente con otra operación: “la resta”.

En el problema de los coches de Federico, los niños cuentan con sus dedos o con objetos que representen a los coches, **dos colecciones por separado**, una con 6 y otra con 2 elementos, las juntan y cuentan cuántos elementos tiene la nueva colección para encontrar que Federico tiene 8 coches. Mientras que para averiguar cuántos dulces tiene Federico, primero **forman una colección con 6 objetos, a la que le agregan 2**; cuentan nuevamente y saben que son 8 dulces.

Para resolver los problemas de Erick la diferencia de las acciones que los niños realizan es todavía más clara, para encontrar con cuántas pelotas se quedó Erick, **cuentan una colección de 6 objetos y a esa le quitan 2** (lo que regala), cuentan lo que queda y obtienen 4. Pero el problema de las estampas que “oficialmente” se resuelve también con una resta, no lleva a los niños a quitar objetos de una colección, más bien tienden a completar: **parten del dos y agregan de uno en uno hasta llegar al 6**, **con la prevención de no confundir los objetos que “agregan” con los que ya tenían,** porque anticipan que tendrán que contar los objetos que agregaron para poder responder la pregunta planteada. Cabe observar que en problemas como estos, agregar elementos a una colección, no es lo mismo que la acción de agregar que realizan en problemas como el de los dulces de Federico.

Cuando los niños tienen la oportunidad de decidir qué hacer frente a los problemas, se les ofrece la posibilidad de encontrarle utilidad a conocimientos previamente adquiridos como lo es el conteo de pequeñas colecciones; también se ejercitan en la elección de una estrategia pertinente para resolver situaciones; se favorece que desarrollen una actitud frente a los problemas: la búsqueda de solución (y no la espera de que alguien les indique lo que se espera que hagan). Así mismo, resolver, por ejemplo, distintos problemas aditivos les permite ir identificando el tipo de conteo que es regulado por una suma o una resta, operaciones que posteriormente aprenderán y vendrán a sustituir sus procedimientos de conteo iniciales.

* Los problemas para justificar la necesidad de usar las operaciones, son del mismo tipo que los anteriores pero involucran cantidades mayores. Esto permite que los niños cambien de estrategia de solución por una que les resulta más pertinente que el conteo uno por uno, que utilizan cuando resuelven problemas en los que los datos son números pequeños.

- En la Lección 27 *El puesto de juguetes* del LTG 2° a los niños se les plantean distintos problemas.


El puesto de juguetes

La mamá de Oriana, Rodrigo y Jorge compra en el puesto de juguetes 3 coches y 2 pelotas. Paga con un billete de 100 nuevos pesos. ¿Cuánto le regresan de cambio? ____________

Rodrigo tiene 15 nuevos pesos y quiere comprar tres juguetes iguales. ¿Qué juguetes puede comprar Rodrigo?
____
¿Le sobró dinero? ____________
¿Qué podrías comprar con 40 nuevos pesos en el puesto de juguetes?
____
____

Uno de los problemas dice:

> La Mamá de Oralia, Rodrigo y Jorge compra en el puesto de juguetes 3 coches y 2 pelotas. Paga con un billete de 100. ¿Cuánto le regresaron de cambio?

En primer lugar, los niños y no los maestros son quienes deben encontrar, en la imagen que acompaña la lección, los datos que hacen falta para resolver los problemas. La imagen y los problemas están diseñados con esta intencionalidad, es lo que Block y Fuenlabrada (1995,1996) denominan como imagen didáctica y pretende desde la lógica de estos autores, poner a los niños en situaciones que les permitan tener experiencias en la línea conceptual de *Análisis de la información,* prevista en el currículo, que implica el desarrollo de la capacidad de los niños para obtener, seleccionar y utilizar información proveniente de una representación gráfica.

En segundo lugar, una vez que los niños elijan de la imagen los datos que les sirven, no sabrán -en principio, si sus maestros han seguido la Propuesta-, que para resolver el problema necesitan hacer “dos multiplicaciones (25X3; 10X2), una suma (75+20) y una resta (100-95)” sencillamente porque la formalización de la multiplicación se hará hasta tercer grado y respecto a la formalización de la suma y la resta, todavía faltan algunos días para que esto suceda.

Sin embargo, esto no significa que no tengan recursos para realizar los cálculos; sobre todo si han tenido oportunidad de trabajar con las leyes de agrupamiento y posición del sistema de numeración decimal. Para calcular el costo de los tres coches (“25 más 25 más 25”) una alternativa posible, y en apego a lo que han venido haciendo con problemas de estructura parecida cuyos datos son **números pequeños** (por ejemplo en la Lección 92, *Más de diez, menos de diez*, LTG 1° aparece el problema: Hay dos árboles, cada árbol tiene dos rama, en cada rama hay dos manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en total?), sería hacer quizá tres dibujos con veinticinco marcas cada uno, para luego contar todas de una en una hasta llegar al setenta y cinco; pero a estas “alturas del partido” ya no están dispuestos a hacer ¡semejante cosa!

Su conocimiento del sistema de numeración les permite ver al 25 no como “uno, uno, uno,…, hasta veinticinco sino como 2 dieces y 5 unos, que con base en las reglas de cambio del SND saben que pueden juntar los dieces (de los tres 25) y obtener 6 dieces; y, al juntar los unos obtienen quince que son lo mismo que 1 diez y les quedan 5 unos (por la regla de agrupamiento y cambio). Ahora tienen 7 dieces y 5 unos y esto es el número 75, así que el costo de los cochecitos es de 75 pesos.

Para encontrar el costo de las pelotas (10 y 10) han tenido suficiente experiencia con el conteo de decenas en el primer grado, que ya saben que diez y diez son veinte, entonces las pelotas cuestan 20 pesos. Para calcular el costo total de los juguetes vuelen a usar las leyes del SND, para resolver 75 más 20 cuentan los dieces (7 y 2) y los unos (5 y 0) y encuentran al 95.

Ahora sólo les falta averiguar cuánto sobra de los 100 pesos si la mamá de Oralia, Rodrigo y Jorge va a gastar 95 pesos en la compra de los juguetes. Muchos niños lo hacen por cálculo mental, pero si no, siempre tienen el recurso de la aplicación de las leyes del SND; en este caso hay que quitar 9 dieces y 5 unos de 1 cien: el cien lo cambian por 10 dieces de los que retiran 9 (dieces); el diez que queda lo cambian por "diez unos" de los que retiran 5, quedando finalmente sólo 5 unos, es decir 5 pesos.

Vale la pena recordar que cuando los niños realizaron el juego de *El Cajero* ascendente, implícitamente se relacionaron con el algoritmo de la suma y con el juego de *El Cajero* descendente, lo hicieron con el algoritmo de la resta. Cuando los alumnos actúan frente a los problemas aditivos que tienen datos numéricos mayores de la forma descrita anteriormente, están sucediendo varias cosas:

- Siguen mostrando su capacidad para establecer la relación semántica entre los datos del problema y el dato desconocido, que se ha visto favorecida al haber tenido la oportunidad de razonar sobre múltiples situaciones menos complejas (con números pequeños y una –y después dos-, relaciones aritméticas) que la que ahora enfrentan (con números mayores y tres relaciones aritméticas).
- La estrategia de conteo (utilizada por los niños) ha evolucionado: de un conteo uno por uno, ha cambiado a un conteo de agrupamientos (cienes, dieces, unos).
- El cambio de estrategia de cálculo está asentada en el conocimiento adquirido sobre el sistema de numeración decimal.
- Se está manifestando uno de los propósitos fundamentales del enfoque metodológico que subyace en la Propuesta de 1993, a saber: que las acciones de los niños frente a las situaciones problemáticas transiten de lo pertinente (el conteo uno por uno, susceptible de utilizarse con números pequeños) hacia un conteo más eficiente (por agrupamientos) y eficaz; en este caso, al conocimiento de los algoritmos de las operaciones de suma y resta, que son los recursos convencionales para resolver los problemas aditivos.

Es decir, los niños están mostrando con su manera de proceder, su capacidad para elegir entre varias opciones una estrategia más eficiente y eficaz que la que utilizaban anteriormente (el conteo simple), que conlleva la apropiación de conocimientos más elaborados -la aplicación de las leyes del SND en situaciones de cálculo y no sólo para la representación convencional de los números- al que han llegado a través de un proceso de aprendizaje.

Cuando los niños empiezan a utilizar las leyes del sistema de numeración para realizar cálculos están en el momento de que la operatoria sea institucionalizada por sus maestros; esto significa que sea identificada con un nombre (suma, resta, multiplicación o división) además, que se les presente el algoritmo que no es más que una manera más organizada de llevar a cabo las acciones que los niños ya vienen haciendo; que para el caso de la suma son: poner los números uno abajo del otro, encolumnarlos, empezar por la derecha hacia la izquierda para controlar simultáneamente el cálculo de los elementos de un mismo orden (unidades, decenas, centenas) y su posible transformación a las de orden inmediato superior.

* <u>Los problemas después de formalizadas las operaciones</u> aparecen inicialmente en coexistencia con la práctica de los algoritmos. Los niños necesitan adquirir soltura en la aplicación de los algoritmos para que empiecen a recurrir a las operaciones y dejen de hacer "desordenadamente" agrupamientos y transformaciones (en el caso de la suma y la resta suelen empezar por cuantificar los ordenes mayores –como sucede con el cálculo mental-, y luego reescribir una vez hechas las transformaciones de un orden a otro cuando hay agrupamientos de diez).

La función de los problemas aditivos en esta fase del proceso es ampliar, profundizar y enriquecer el conocimiento sobre la estructura aditiva (y en su momento la multiplicativa), como puede observarse por ejemplo, en la Lección 10 *Retrocedemos* LTG 3°, en la que el aspecto que se estudia son problemas en los que la resta permite calcular un faltante o una cantidad inicial; o, bien utilizar la suma y la resta cuando los datos ya no refieren a la cardinalidad de colecciones, sino al manejo de magnitudes como sucede en la Lección 37 *La terminal de autobuses* LTG 3°, en la que se plantean problemas de tiempo (horas y minutos).

Resumiendo, en este artículo se ha reflexionado específicamente sobre:

i) Los diferentes significados del número, sus usos y funciones. Particularmente los números sirven para contar; y hemos revisado cómo los niños eligen el conteo como una estrategia de solución frente a problemas que involucran datos numéricos pequeños.
ii) El lenguaje matemático referido al trabajo inicial con la aritmética a través de la comprensión de la escritura de los números y los algoritmos convencionales, reconociendo su interdependencia con el sistema de numeración en el que operan.
iii) Los distintos significados de las operaciones a través de problemas de distinto tipo que son resueltos por una misma operación.
iv) Qué significa que una estrategia de solución evolucione y cuáles son los recursos didácticos que lo permiten.

CONCLUSIONES

Se ha procurado dar cuenta de cómo la Propuesta vigente para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, de realizarse en el aula, da a los niños múltiples posibilidades de experimentar con el conocimiento matemático y de que lo vayan reconociendo como un instrumental útil para resolver situaciones. Pero, la metodología sugerida no solamente posibilita el acceso al conocimiento sino que además favorece el desarrollo de competencias en los niños, que empiezan a preocupar a algunos actores del sistema educativo nacional.

No comprender esto, implica suponer erróneamente que se debe optar por una postura teórica en detrimento de la otra. Es decir no se trata de optar por el desarrollo de competencias que se expresa a través de la realización de proyectos (integrando varias disciplinas); o por una postura constructivista del aprendizaje que se realiza a través de situaciones problemáticas específicas a cada disciplina. Ambas posturas son complementarias.

Sin embargo cabe precisar que el desarrollo de competencias es posible sólo con una adecuada resolución didáctica y esto implica que los maestros comprenden la necesidad de redefinir las prácticas de enseñanza “enciclopedistas”, que se deciden a dejar de “controlar” la transmisión del conocimiento a través de clases magistrales y en cambio, permitan que los niños exploren la pertinencia o no de sus propias maneras de enfrentar las situaciones, de discutirlas con sus pares, de encontrar argumentos para defenderlas frente a otros, de escuchar lo que sus compañeros y su maestro opinan sobre el particular. En este proceso serán los niños quienes tomen el control de su conocimiento y la responsabilidad de sus decisiones, bajo la supervisión diligente de sus maestros. Desde esta perspectiva metodológica se posibilita que los niños accedan con sentido al conocimiento matemático.

Ciertamente las competencias que se desarrollan con la metodología de enseñanza discutida en este artículo no son todas a las que aspiran “los partidarios” del desarrollo de competencias en la escuela; pero también es cierto que la matemática no es la única disciplina con la que los niños tienen que interactuar en su proceso de formación.

Cabe finalmente aclarar que, en las reflexiones sobre el supuesto antagonismo entre “competencias y didácticas específicas” vertidas en este artículo, no me he ocupado de “los proyectos” de enseñanza que sustentan a los programas diseñados desde la intencionalidad de desarrollar competencias en los niños porque considero que el conocimiento matemático al que los niños tienen que acceder en la escuela primaria, se desdibuja en los proyectos, reduciéndolo a una matemática “de tendero”. No cometamos el error de perder de vista la fallida propuesta de integración curricular que se propusiera en el sistema educativo nacional por inicios de la década de los ochenta, en la que la propuesta para la enseñanza de la matemática prácticamente desapareció. El acceso al conocimiento matemático requiere de su propio espacio, de continuidad, de ensamblaje entre unos saberes y otros, de espacios de consolidación.

Es preocupante la introducción al sistema educativo de un discurso pedagógico que pregona la organización curricular a través de proyectos, sé que el conocimiento matemático no es susceptible de enseñarse así, desconozco lo que le pueda pasar a las otras disciplinas; sin embargo me preocupa que una incorporación poco cuidadosa de este tipo de organización curricular provoque un vacío de conocimiento disciplinario como le sucediera a los sistemas educativos de algunos países europeos según se reporta en el informe EURYDICE (2003).

Bibliografía

Ávila, A. (2004). “Los profesores y sus representaciones sobre la reforma de las matemáticas”. *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía de aprendizaje en nuestras escuelas.* México: Secretaría de Educación Pública.

Barriendos, A. L. (2005). *¿Es de suma o de resta? Experiencias con situaciones aditivas para maestros de primaria.* Tesis de Maestría en Ciencias en Investigación Educativa. México: DIE /CINVESTAV.

Block, D., e I. Fuenlabrada (1995,1996). “Cómo elaborar materiales de matemáticas para el nivel básico”. *Revista Educación 2001*. Número 7, diciembre 1995; Número 8, enero 1996. México: Instituto Mexicano de Investigaciones Educativas S.C.

EURYDICE (2003). Ministerio de Educación, cultura y deporte. Secretaría General de Educación y formación profesional. Centro de Información y Documentación Educativa (C.I.D.E.)

Fuenlabrada, I (2001) “La numerosidad de las colecciones y los números como signos que las representan”. *Memorias electrónicas del VI Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Manzanillo, Colima. México: COMIE.

Fuenlabrada, I. (2005). “El Programa de Educación Preescolar 2004: una nueva visión sobre las matemáticas en el Jardín de niños”. *Revista Cero en Conducta*. Año 20, No. 51, Abril 2005. México: Educación y Cambio A.C.

Garduño, T., Guerra, Ma. E., González, O., Rodríguez, L. y A. Silva (2001). *Guía para el Instructor Comunitario. MEIPIM*. México: Edición Dirección de Medios y Publicaciones del Consejo Nacional de Fomento Educativo.

Martiradoni, Z. (2004). *El profesor, el saber a enseñar y el saber enseñado: un estudio de caso sobre la enseñanza de la multiplicación en segundo grado de primaria*. Tesis de Maestría en Ciencias en Investigación Educativa. México: DIE /CINVESTAV.

Moscoso, A. (2005). *Procesos de apropiación de una propuesta curricular para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Un estudio de caso*. Tesis de Maestría en Ciencias en Investigación Educativa. México: DIE /CINVESTAV.

Nogueira, M., Rivera, N. y Blanco, F. (2003). “Desarrollo de competencias para la gestión docente en la educación médica superior”. *Revista Educación Médica Superior*, Vol. 17, No. 3 Julio-Septiembre, 2003 (p.2). Cuba: Instituto Superior de Ciencias Médicas de La Habana.

Perrenoud, Ph, (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Biblioteca de Aula. España: Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L.

[1] **Temas transversales**: visión equilibrada de las personas y de la sociedad; tomar conciencia de su situación dentro de su entorno personal cercano, así como un entorno social más amplio. Atención especial a: a) reconocimiento de las normas y valores propios y de los demás, y la manera de abordarlos; b) reconocimiento de las similitudes y de las diferencias entre los sexos, y la manera de abordarlos; c) la relación entre el hombre y la naturaleza y el concepto de desarrollo sostenible; d) una ciudadanía activa en una sociedad democrática y multicultural y en la comunidad internacional; e) actuar con respeto hacia la seguridad personal y general dentro del entorno propio, así como hacia la seguridad vial; f) el significado social del desarrollo tecnológico, incluyendo las tecnologías modernas de la información y la comunicación (TIC); g) el significado social del trabajo remunerado y no remunerado; h) los logros y posibilidades del arte y la cultura, incluidos los medios de comunicación.

Aprender a hacer: a) comprender el neerlandés y el inglés escrito y hablado; b) hablar y escribir el neerlandés correctamente, c) buscar, seleccionar, reunir y organizar información proveniente de distintas fuentes; d) utilizar los conocimientos aritméticos, como por ejemplo, efectuar operaciones mentales de aritmética, aplicar sus reglas, medir y calcular; actuar de acuerdo con las normas del medio ambiente, de la higiene, la salud y de la ergonomía; e) utilizar los materiales, herramientas y equipos de forma segura y eficaz; f) utilizar los ordenadores.

[2] Particularmente la obra *Dialogar y Descubrir* desarrollada, entre 1987-1993 por investigadores del Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (DIE/CINVESTAV) para el subsistema educativo de Cursos Comunitarios del CONAFE fue en México, la primera innovación educativa en este sentido, ésta influyó la reforma de modernización de la educación que vino después.

[3] Informe final (en proceso) del proyecto Replanteamiento del preescolar comunitario, desarrollado en el Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV, bajo la responsabilidad de Irma Fuenlabrada, por solicitud del Consejo Nacional de Fomento Educativo.

[4] El subrayado es nuestro.

[5] Informe final (en proceso) del proyecto Replanteamiento del preescolar comunitario, desarrollado en el Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV, bajo la responsabilidad de Irma Fuenlabrada, por solicitud del Consejo Nacional de Fomento Educativo.

[6] Consejo Nacional de Fomento educativo.

[7] La propuesta de 1993 no elimina esta función sino que reubica los momentos en los que el maestro interviene proporcionando información.

[8] Ma. de los Ángeles Rangel Yescas, alumna de la Maestría en Investigación Educativa del DIE/Cinvetav, en su trabajo de tesis (en proceso), analiza estas actividades que experimenta con un grupo de niños que estaban por terminar el tercero de preescolar. De ahí se toman los datos que aquí se reportan.

[9] Éste no es un problema "clásico" de resta, aquellos en los que a una colección se le quita una parte, como: Adriana tiene 11 dulces y le regala 3 a Verónica. ¿Cuántos dulces le quedaron a Adriana?

[10] Lecciones 33, 44, 45, 48, 50, 51, 64, 66, 68, 69, 73, 76, 86, 90, 92, 93, 95, 97, 99, 113, 116, 118, 119, 121, 123, 124, 125 y 126.

[11] Los números dígitos son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y el 0.

[12] Irma Fuenlabrada y Ruth Valencia así como Ma. de los Ángeles Rangel Yescas, referente empírico del trabajo de investigación que sobre el preescolar se realiza en el DIE/CINVESTAV. De ahí se toman los datos que aquí se reportan.

[13] Esta denominación aparece en el juego de *El Cajero* que se revisará más adelante.

El enfoque de resolución de problemas y la resolución de los problemas del enfoque

Silvia García Peña

La transformación de la práctica docente propuesta por la reforma de 1993 para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas demanda cambios profundos en las concepciones de los docentes. A más de una década de tal propuesta se sabe que el enfoque de resolución de problemas descrito en los documentos oficiales ha tomado rumbos diferentes a los esperados[1].

No resulta sencillo cambiar las concepciones de los profesores y mucho menos modificar su práctica cotidiana, es necesario que el docente esté continuamente en contacto con las ideas propuestas y, a pesar de trastocar sus propias representaciones, logren seducirlo al mostrarse como una mejor opción de lo que él sabe hacer y hace en su grupo. Ante este panorama, tiene cabida la siguiente pregunta:

> *¿Cuáles son las razones por las que muchos docentes no trabajan con el enfoque de resolución de problemas en las clases de Matemáticas?*

Entre las varias razones se encuentran aquellas dificultades y obstáculos que los maestros tendrán que enfrentar, algunas de ellas se abordan en el presente trabajo el cual ha sido dividido en dos partes: En la primera se ejemplifica y expone el enfoque de resolución de problemas y la segunda trata de los problemas que los docentes pueden tener al intentar aplicar ese modelo didáctico.

Sólo por motivos de exposición estos obstáculos y dificultades han sido clasificados, no obstante se podrá observar que esta clasificación puede hacerse de varias maneras, sin embargo con la categorización de estos obstáculos se trata de ganar claridad en la exposición.

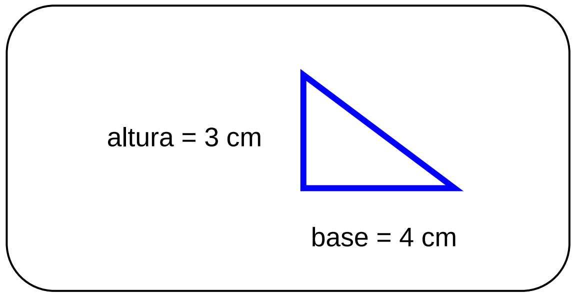
1. El enfoque actual: Una nueva manera de concebir las Matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

1.1 Un mismo objeto de saber, diferentes acercamientos didácticos

Clase 1: ***Una explicación clara y concisa***

Para enseñar el cálculo del área del triángulo una maestra explica a sus alumnos que lo que tienen que hacer es multiplicar la medida de la base por la medida de la altura y dividir el resultado entre dos.

Enseguida dibuja en el pizarrón:



Y, para ejemplificar lo que acaba de explicar, calcula el área anotando:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{4 \times 3}{2}$$

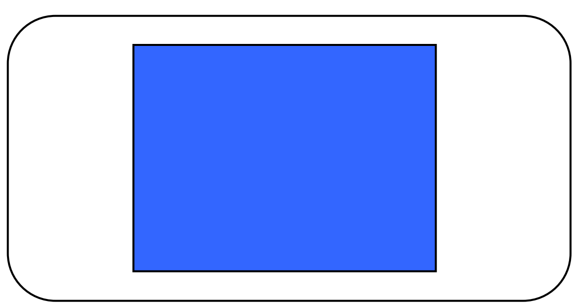
$$A = \frac{12}{2}$$

$$A = 6cm^2$$

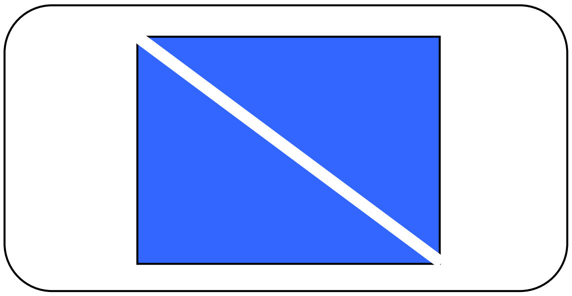
Después de preguntar si entendieron, plantea más ejemplos y hace participar a los alumnos pasándolos al pizarrón para que practiquen lo que ella acaba de explicar.

Clase 2: ***Hay que mostrar "el por qué"***

Para enseñar el mismo tema, un maestro considera que no basta con explicar a los alumnos el procedimiento para el cálculo del área del triángulo, entonces decide mostrar de dónde se obtiene la fórmula. Lleva un rectángulo lo suficientemente grande para que todos sus alumnos lo vean y recuerda junto con ellos cómo se calcula el área de dicho rectángulo (los niños han visto ese tema con anterioridad).



Una vez que recordaron cómo se calcula el área, al frente de los alumnos corta el rectángulo por la diagonal en dos triángulos.



Superpone los triángulos y con énfasis les pide observen que son iguales y que, por lo tanto, cada triángulo es la mitad del rectángulo inicial. Ante la pregunta ¿cuál es el área de cada triángulo? Algunos niños responden: la mitad del área del rectángulo. Entonces el maestro concluye que el área de un triángulo se calcula con la fórmula:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Enseguida resuelve algunos ejemplos y luego pasa a la ejercitación por parte de los alumnos.

Clase 3: ***Los alumnos manipulan material concreto***

Otra maestra considera que tampoco es suficiente con mostrar a los alumnos de dónde se obtiene la fórmula para calcular el área del triángulo y decide que cada estudiante debe tener el material y manipularlo; lleva un rectángulo para que cada niño lo manipule siguiendo las instrucciones que ella dicta: lo doblan en dos triángulos por la diagonal y lo recortan.

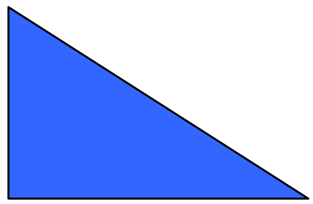
Una vez que tienen los dos triángulos lo ponen uno encima del otro para comprobar que, efectivamente, son iguales y así, cada alumno "deduzca" que el área del triángulo es la mitad del área de rectángulo, llegando a la fórmula:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Enseguida resuelve algunos ejemplos y luego pasa a la ejercitación por parte de los alumnos.

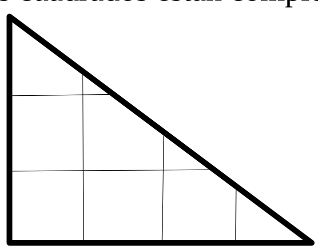
Clase 4: ***Los alumnos buscan la manera de calcular el área de un triángulo***

Una maestra entrega a los alumnos un triángulo rectángulo recortado y les pide que calculen el área del mismo.



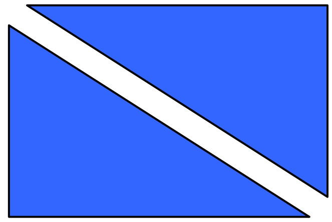
Los deja que interactúen en equipo para que traten de hallar el área mientras ella monitorea el trabajo. Observa a los equipos:

- ♦ Un equipo, recordando que el área la calculan contando los cuadrados que caben dentro de la figura, decide cuadricular el triángulo en centímetros cuadrados y contar. Tienen dificultades porque no todos los cuadrados están completos.

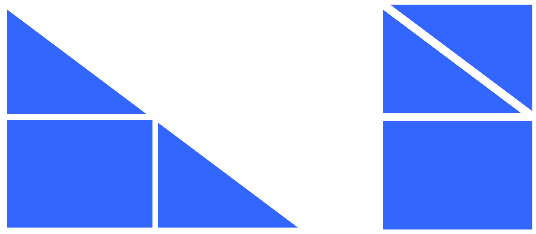


- ♦ Otro equipo mide los lados del triángulo y los suma. Tienen problemas porque una medida no es en centímetros exactos.

- ♦ En otro equipo observan que dos triángulos de los que la maestra les dio forman un rectángulo y como ya saben calcular el área de un rectángulo, primero la calculan y luego le sacan mitad.



- ♦ En otro equipo se dan cuenta que pueden dividir el triángulo en tres figuras con las que pueden formar un rectángulo, luego calculan el área de ese rectángulo.



- ♦ Un equipo más mide los lados del triángulo y, recordando que en el rectángulo se multiplican las medidas, deciden multiplicar las medidas de los lados del triángulo. Tienen problemas porque una medida no es exacta.

Cuando la profesora nota que la mayoría de los equipos ya terminó, invita a algunos a pasar al frente para platicar el procedimiento y el resultado al que llegaron, la decisión de quiénes pasarán al frente la toma con base en lo que observó en los equipos.

Cuando algunos equipos no están de acuerdo con lo que otros exponen, la maestra pregunta a los demás *¿qué opinan?, ¿están de acuerdo?, ¿cómo ven ustedes este procedimiento*? Constantemente devuelve a los alumnos la responsabilidad de validar las diferentes formas que surgieron para resolver el problema. Son los propios alumnos quienes deciden si lo que hizo cada equipo es correcto o no y para ello deben argumentar su respuesta.

Para finalizar la sesión, la maestra recapitula lo que hicieron los equipos y formaliza el conocimiento matemático en juego, en este caso, presenta la fórmula convencional, misma que se deriva de uno de los procedimientos de los equipos. Después resuelven algunos ejercicios de aplicación.

1.2 El enfoque propuesto: cambian las ideas, cambian los roles

En la clase 1 es en donde menos participan los alumnos, la clase está prácticamente a cargo del profesor quien explica y los niños "atienden", aprenden a seguir instrucciones y las aplican en otros ejemplos propuestos.

En la clase 2 hay un intento por mostrar a los alumnos "el por qué" de la fórmula que tendrán que aprender. No obstante sigue siendo el maestro quien es el protagonista de la clase y los alumnos observan lo que él hace, es una clase ostensiva.

En la clase 3 hay un intento de que los niños "hagan" algo, aunque la maestra es quien dice lo que tienen que hacer, es decir, el material concreto en este caso sólo sirvió para que los niños siguieran las instrucciones de la profesora.

La clase 4 es en la que se aplica el enfoque de resolución de problemas, que propone[2]

Hay tres momentos en el planteamiento de una actividad:

El momento en el que el maestro organiza al grupo en equipos, en parejas o de manera individual y en el que se plantea la actividad.

→

El momento en el que los niños se hacen cargo del problema, es decir, en el que los alumnos realizan las acciones que consideran pertinentes para resolverlo y en el que el maestro observa cómo lo hacen.

→

El momento en el que se discuten, se valida, se socializan los procedimientos encontrados por los alumnos y se analizan sus ventajas y desventajas.

Podemos diferenciar estos tres momentos:

Primero: La clase inicia planteando un problema a los niños: calcular el área de un triángulo. Entendiendo al *problema* como una situación para la cual los niños no tienen una respuesta inmediata, pero cuentan al menos con una manera de resolverlo aludiendo a sus conocimientos previos.

En términos generales, bajo el enfoque propuesto, la resolución de problemas es el eje alrededor del cual debe girar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Se trata ahora de aprender Matemáticas no sólo *para* resolver problemas sino también *a través* de la resolución de problemas. Esto implica que los problemas no sólo son el *fin* sino también el *medio* del aprendizaje de las Matemáticas.

Los conocimientos previos toman particular importancia porque constituyen el punto de partida para la adquisición de nuevos conocimientos. Se trata de que, a partir de ellos, los alumnos evolucionen a formas de pensar más avanzadas. En el ejemplo, se ve claramente que, si bien los alumnos no conocían la fórmula para calcular el área del triángulo, contaban con conocimientos que les permitieron resolver el problema.

Segundo. La maestra ha decidido organizar a los alumnos en equipos. El trabajo en equipo adquiere particular importancia y se promueve no sólo desde los lineamientos generales del enfoque planteado en los libros para el maestro, sino también desde los mismos libros del niño en los que continuamente se encuentran consignas para trabajar en equipo. Esto no excluye, de ninguna manera, el trabajo individual, por parejas o grupal.

En este momento los alumnos tratan de resolver el problema y la maestra observa lo que hacen. Las intervenciones del docente deben ser de apoyo pero no de dictar soluciones. Saber lo que los equipos hacen es necesario para elegir a aquellos que intervendrán en el momento de la confrontación

Tercero. Cuando los equipos han terminado la maestra organiza la confrontación de procedimientos y resultados. La confrontación y validación es otro de los aspectos fuertes del enfoque, desde este punto de vista escuchar a otros contribuye a la construcción de conocimientos. Es el momento en el cual los alumnos podrán confirmar o rechazar sus hipótesis iniciales acerca de la resolución del problema que se está trabajando. En los libros para el maestro se especifica[3]:

> La confrontación de estrategias y respuestas ayuda a los niños a percatarse de que puede haber mejores formas para solucionar un problema determinado; también permite ayudar a los compañeros menos avanzados en el proceso de aprendizaje, así como a los más adelantados, a verificar respuestas y enriquecer conocimientos.

La explicación por parte del maestro y la formalización del contenido no están excluidas de esta propuesta. Los materiales oficiales determinan[4]:

> El maestro debe tomar en cuenta que su papel no se limita a ser un facilitador de la actividad de los alumnos. Respetando su actividad y creatividad, debe intervenir con sus orientaciones, explicaciones y ejemplos ilustrativos cuando así lo requiera el avance del grupo. Aquí es donde se localiza uno de los momentos más difíciles de su hacer profesional ya que, con base en su experiencia, debe seleccionar el momento oportuno de su intervención de tal manera que no sustituya el trabajo de los alumnos.

A grandes rasgos ésta es la manera en que se propone se organice la clase de Matemáticas. Trabajar de esta manera lleva consigo fuertes retos y demandas para el docente, en lo que sigue comentaremos la problemática que implica este enfoque.

2. Obstáculos y dificultades para aplicar el enfoque de resolución de problemas

En su intento de aplicar el enfoque de resolución de problemas, los maestros se enfrentan a diversas dificultades y tienen que vencer obstáculos como los presentados en el siguiente diagrama. Cabe aclarar que la lista no es exhaustiva y que, afortunadamente, no siempre se presentan todos.

La principal dificultad es lograr un cambio en las concepciones de enseñar y aprender Matemáticas, es probable que cuando el maestro logre comprender de otra manera lo que significa aprender Matemáticas no se preocupe tanto por las presiones externas o la indisciplina aparente del grupo y tampoco tenga la sensación de estar invirtiendo mucho tiempo a trabajar un contenido.

Asimismo, varias de estas dificultades no son propias de esta forma de trabajo sino de cualquiera, por ejemplo, la falta del dominio del contenido a enseñar o los grupos numerosos, no obstante, es probable que en el enfoque propuesto estas deficiencias sean más notorias.

A continuación comentaremos con más detalle estas dificultades y estos obstáculos y daremos algunas ideas de cómo podrían aminorarse, esto con el ánimo de que el docente se sienta más motivado a probar esta forma de trabajo en beneficio de sus alumnos.

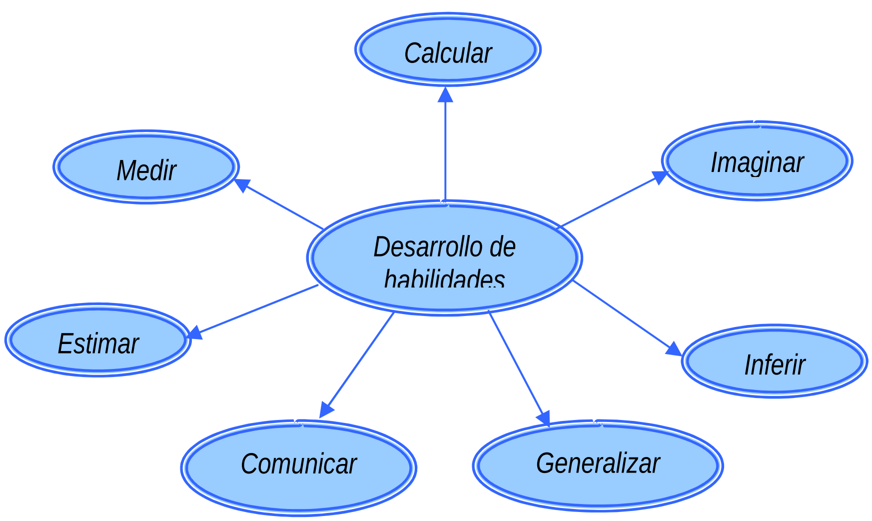
2.1. Demandas para el docente.

2.1.1 Una manera diferente de conceptualizar el significado de aprender Matemáticas

En este enfoque se trata de que el alumno no sólo adquiera ciertos conocimientos matemáticos sino que también desarrolle habilidades y se promueva en él actitudes positivas hacia la Matemática. Es común que los maestros den mucho más peso a la adquisición de conocimientos porque consideran que éste es el propósito principal de aprender matemáticas y dejan de lado lo demás.

Si el maestro tiene la idea de que aprender Matemáticas es solamente saber hacer cuentas, aprenderse fórmulas o definiciones, resolver problemas con un modelo de solución único y convencional, entonces es muy probable que sienta que el enfoque de resolución de problemas "quita tiempo".

En este enfoque, además de que se promueve la construcción de conocimiento, se espera que los alumnos desarrollen su habilidad para establecer hipótesis o conjeturas ante determinada situación problemática y luego trate de verificarlas; aprendan a argumentar para tratar de confirmar o rechazar sus hipótesis iniciales; sepan escuchar la postura de otros respecto al mismo problema; dialoguen con otros para tratar de llegar a acuerdos expresando y defendiendo su punto de vista y sepan admitir cuando han cometido un error. El propósito de aprender Matemáticas, bajo este enfoque, involucra el desarrollo de habilidades[5]



Un alumno que ha desarrollado estas habilidades está en mejores condiciones de resolver problemas aplicando los conocimientos adquiridos. También es importante promover actitudes positivas hacia las Matemáticas, actitudes de reto cuando se enfrenta a un problema y de paciencia y tolerancia hacia otros ritmos de trabajo y otras maneras de afrontar los mismos problemas. Al contrario, con un modelo tradicional de enseñanza, tiene menos posibilidades de desarrollar lo anteriormente expuesto, en este modelo el papel del alumno se reduce a escuchar y atender a las explicaciones del maestro.

> Es necesario tener un continuo acercamiento con las ideas del enfoque de resolución de problemas a través de la interacción con otros docentes que compartan las mismas inquietudes, leer textos que traten estos temas e intentar conocer a fondo la propuesta a través de los materiales de apoyo o de cursos de actualización en donde se discutan estas concepciones.
>
> Es importante que el maestro se cuestione de manera constante su quehacer docente y el propósito final de educar a los alumnos
>
> Pero sobre todo se requiere una actitud abierta hacia los cambios, un saber desprenderse del pasado y de las programaciones que tenemos sobre lo que es el aprendizaje de las Matemáticas, una constante reflexión sobre lo que hacemos y un estado de alerta continuo a lo que en realidad mueve nuestra forma de pensar y de actuar en las clases de Matemáticas.

2.1.2 El dominio del contenido a enseñar

El dominio del contenido a enseñar es una demanda de cualquier forma de enseñanza. No obstante, en una enseñanza tradicional los alumnos por lo regular deben estar callados y atentos, el maestro elige la situación a resolver y la manera en que hay que resolverse de ahí que ejerza más control en el saber que está en juego.

En el enfoque de resolución de problemas es necesario dominar el contenido porque, al dejar que los alumnos resuelvan como quieran el problema y pasen al frente a explicar sus procedimientos, el maestro no sabe la dirección exacta que tomará la clase.

Tener un conocimiento amplio del contenido a enseñar le permitirá al docente:

- Prever los posibles procedimientos que los alumnos pueden seguir al resolver un problema,
- Prever los errores que pueden cometer
- Plantear contraejemplos que hagan reflexionar a los niños para que abandonen sus concepciones erróneas
- Elegir adecuadamente los procedimientos que conviene socializar en el momento de la confrontación
- Saber lo importante del contenido que está en juego y enfocar las actividades y comentarios de la clase hacia lo esencial.

Ninguna de las tareas anteriores resulta sencilla si no se comprende profundamente el conocimiento que se está trabajando.

> La continua actualización del docente en cuestiones del contenido es un aspecto clave en el éxito de su práctica. Puede hacerlo de manera autodidacta acercándose a textos de Matemáticas preferentemente aquellos que presentan la materia con el enfoque de resolución de problemas: los mismos libros gratuitos de primaria, algunos de secundaria (entre ellos el Fichero de Actividades Didácticas y el Libro para el maestro que la SEP entrega a los profesores de Matemáticas de Secundaria), el taller *La enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria* y algunos libros de la Biblioteca del Aula.
>
> La interacción con otros compañeros también es benéfica, puede organizar reuniones de estudio en Juntas de Consejo o aprovechar otros momentos para intercambiar opiniones.
>
> Asistir a cursos en Centros de Maestros o a otras instituciones que brinden cursos de actualización en los distintos temas de Matemáticas le permitirá conformar un cuerpo sólido de conocimientos.

2.1.3 Comprensión limitada del enfoque

El conocimiento y la comprensión del enfoque de resolución de problemas no es un propósito sencillo de alcanzar. Muchas ideas que corresponden a este enfoque no han podido implementarse ni en el discurso, como el papel del error en la construcción de saberes matemáticos o la confrontación de procedimientos y resultados para que los alumnos confirmen o desechen sus hipótesis iniciales, ambas son concepciones que difícilmente impactan en la práctica.

Por otro lado, hay varias ideas conviviendo con las del enfoque y que los maestros erróneamente le han adjudicado, tal es el caso de pensar que el uso de material concreto es sinónimo de trabajar con el enfoque cuando no siempre es así, o bien que sólo los problemas de la vida cotidiana son significativos para los alumnos, idea que tampoco es esencial en esta forma de trabajo pues también puede trabajarse con problemas puramente matemáticos o de la fantasía infantil.

Es probable que la información contenida en los libros para el maestro no sea suficiente y esto ha ocasionado que haya aspectos imprecisos en la incorporación de la propuesta curricular en el aula.

Es necesario aunque no suficiente, leer con mucha atención y cuidado la sección *Recomendaciones didácticas generales* contenida en los libros para el maestro de Matemáticas primero a cuarto o bien *Aspecto generales del enfoque didáctico* en los libros para el maestro de quinto y sexto.

También se sugiere acercarse a otros materiales de apoyo como los cinco libros del Rincón relacionados con las Matemáticas y que en su introducción incluyen aspectos importantes para comprender el enfoque propuesto.

En esta lista de materiales de consulta hay que incluir el Taller *La enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria*. Y el *Libro para el maestro de Matemáticas Secundaria* que en su segunda edición incluye un sección dedicada a la explicación del enfoque.

Con respecto a los cursos que ofrecen diferentes instituciones cabe mencionar que, si bien son muy recomendables, se debe acudir a ellos con cautela, es probable que las personas que imparten dichos cursos tengan una comprensión limitada o incluso errónea del enfoque. El acercamiento crítico a estos cursos permitirá tomar lo que realmente sea conveniente y desechar aquello que no lo es, después de todo, siempre hay algo que aprender.

2.1.4 Conocimiento de la didáctica de contenidos matemáticos específicos

No basta con que el docente conozca de manera general el enfoque de resolución de problemas, también es necesario que tenga conocimiento de la secuencia didáctica de algunos contenidos específicos.

Por ejemplo, para el trabajo con las siguientes magnitudes que se estudian en la primaria:

longitud	área	volumen	capacidad	peso

Es importante que el profesor conozca la secuencia didáctica plasmada en los materiales de apoyo:

Comparación directa

↓

Comparación usando un intermediario

↓

Medida con unidades no convencionales

↓

Medida con unidades convencionales

Conocer esta secuencia le permitirá al docente advertir el sentido de muchas de las actividades propuestas en los libros de texto y en los ficheros de actividades didácticas, de esta manera podrá obtener el mayor provecho de ellas al trabajarlas con su grupo.

Esto se aplica a otros contenidos matemáticos tales como la adición, sustracción, multiplicación, división, fracciones, decimales, sistema decimal de numeración. No obstante que las lecciones tienen en cuenta los lineamientos generales del enfoque, cada secuencia plasmada en los libros de texto está basada también en las investigaciones particulares sobre el saber en juego.

> Es importante que el maestro lea con cuidado y atención las *Recomendaciones didácticas por eje* incluidas en los libros para el maestro. Además, revisar las lecciones correspondientes a un tema, analizarlas y tratar de comprender el propósito y sentido de cada una así como ubicarla dentro de la secuencia didáctica completa.
>
> Para algunos contenidos, la secuencia didáctica está explicada en los libros: *Los números y su representación*, *Lo que cuentan las cuentas de sumar y restar* y *Lo que cuentan las cuentas de multiplicar y dividir*. La secuencia para el estudio de varios temas se encuentra en la primera y segunda parte del taller *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*.
>
> Desafortunadamente no se cuenta con materiales similares para otros contenidos, de ahí que el único recurso que se tiene es el análisis de las mismas lecciones del libro de texto, o bien, en bibliografía especializada o incluso en Internet. El acercamiento a estos materiales debe ser con cautela, aprendiendo a distinguir lo que puede considerarse basado en el enfoque de resolución de problemas y lo que no sigue los lineamientos de éste.

El docente es un profesional que tiene a cargo una de las tareas más delicadas e importantes de la sociedad: educar a las generaciones futuras. Su tarea no puede tomarse a la ligera, no puede improvisarse, debe hacerse con todo el rigor de una profesión, de ahí la importancia de cumplir con estas demandas, no sólo bajo la propuesta oficial para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas sino para cualquiera que se decida seguir.

2.2. Características del grupo

2.2.1 Grupos heterogéneos

Otra de las dificultades que podrían enfrentar los maestros se refiere a los diferentes ritmos de aprendizaje de los alumnos y a los diferentes niveles de conocimientos previos con los que cuentan. La heterogeneidad puede causar algunas situaciones como las siguientes:

- ♦ Algunos integrantes del equipo comprenden y actúan más rápidamente dejando a otros rezagados y muchas veces sin saber qué se está haciendo.

- ♦ Algunos alumnos y/o equipos terminan más rápidamente que otros y empiezan a aburrirse o a indisciplinarse.

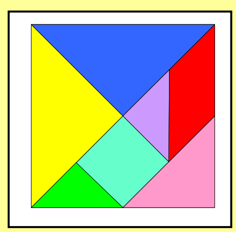
Si se analiza con cuidado, podrá observarse que el enfoque de resolución de problemas es más adecuado para trabajar con grupos heterogéneos porque toma en cuenta las diferentes formas de resolver un problema, en cambio, una explicación grupal está suponiendo que todos los alumnos tienen el mismo nivel de conocimientos.

Para evitar que en un equipo los alumnos más avanzados dejen rezagados a los otros, se puede plantear el problema y dar tiempo para que cada uno lo trate de resolver o lo resuelva individualmente. Después se forman los equipos y los alumnos comparan al interior los intentos de resolución o los resultados si ya los tienen, de esta manera se evita que algunos alumnos estén totalmente ajenos a lo que se discute por la falta de comprensión debida a que procesan más lentamente la información del problema.

Si un equipo termina antes que los demás, una posible estrategia es contar con un banco de actividades que no requieran supervisión directa del profesor y en la que los alumnos pueden emplear el tiempo esperando a que terminen sus compañeros.

Tener un *Rincón de las Matemáticas* (como el que se propone en el libro de segundo grado) que cuente con materiales como Tangram, geoplano, tarjetas problema, fichas, dados, juegos de mesa, etc. Las actividades pueden estar escritas en tarjetas:

Con las 7 piezas del tangram se forma un cuadrado. Ahora forma cuadrados con:
1. Una pieza
2. Dos piezas
3. Tres piezas
4. Cuatro piezas
5. Cinco piezas



Inténtalo con 6 piezas ¡es imposible!

Dependiendo del tema y del conocimiento de los niños el maestro puede plantear nuevos retos a los alumnos que terminaron muy rápido debido a que el nivel de dificultad fue bajo para ellos; una estrategia es llevar preparados problemas con un grado de dificultad mayor, por ejemplo, aumentando el rango numérico, o cambiando el tipo de números (de enteros a fracciones o decimales).

2.2.2 Grupos indisciplinados

Cuando los alumnos trabajan con este enfoque la gestión es difícil, podría generarse un ambiente de indisciplina que no sólo impacienta al profesor de grupo sino que suele ser molesto para los grupos vecinos. Parece ser que el trabajo individual o incluso el grupal son preferidos por los maestros sobre el trabajo en equipo porque les da más control de grupo; en el grupal incluso se busca homogeneizar los ritmos de trabajo de los alumnos argumentando que esto ahorra tiempo.

La “falta de disciplina” puede concebirse de varias maneras y tener diferentes factores que la causan. Es probable que al trabajar en equipo una actividad o un juego se escuche “ruido” en el salón de clase. Es importante observar si ese ruido se debe a la discusión que tienen los alumnos que están enfrascados en la actividad o a su entusiasmo por el juego propuesto, en este caso puede decirse que esto no es en realidad indisciplina sino una consecuencia natural de esta forma de trabajo en la cual los alumnos no siempre están callados oyendo explicaciones del maestro.

También es muy probable que la falta de disciplina lo sea realmente, es decir, que no se trate del ruido hecho al trabajar sino de que, en verdad, los alumnos se estén dedicando a otros asuntos que no corresponden a la actividad, por ejemplo, platicar de asuntos personales, hablar en un tono alto de voz o pararse de su lugar y crear un ambiente demasiado relajado. En este caso hay que analizar si la situación propuesta:

♦ No es una actividad que los motive

♦ Es demasiado fácil (la resuelven y se ponen a hacer otras cosas)

♦ Es demasiado difícil (no tienen idea de cómo iniciar la resolución)

♦ Es incomprensible (no saben lo que tienen que hacer)

Los problemas propuestos en los libros de texto no siempre reúnen las características para que en cualquier grupo resulten adecuados en cuanto nivel e interés, de ahí que no se debe confiar ciegamente en que cualquier actividad del libro de texto será una buena actividad para el grupo en cuestión.

Si la indisciplina se debe a la naturaleza de la actividad hay que platicar con los alumnos y tratar de que tomen conciencia de las molestias que podemos causar a los grupos vecinos e incluso a los compañeros del mismo grupo. Puede, al inicio del curso, elaborarse democráticamente una lista de las reglas de comportamiento para cuando se trabaje en equipo, escribirla en un tamaño adecuado y dejarla en un lugar visible en el salón.

En los casos en que la actividad no resultó interesante, fue muy fácil o muy difícil, el maestro tiene que tomar la decisión de hacer los cambios pertinentes, por ejemplo:

- ♦ Motivarlos mostrándoles, de alguna manera, la utilidad, importancia o interés de la actividad

- ♦ Aumentar el grado de dificultad para que realmente sea un reto para el alumno.

- ♦ Disminuir el grado de dificultad para que los alumnos puedan acceder a ella

- ♦ Explicarla.

- ♦ En caso extremo, suspenderla y cambiarla.

A este respecto es necesario que el maestro haya revisado con antelación la actividad y, conociendo a sus alumnos, determine la manera de trabajarla; una buena planeación aumenta las probabilidades de éxito. Es importante aclarar que de ninguna manera se está invitando a que, si la lección está difícil se trate de "evitar el error" diciéndole al alumno cómo debe resolverla o mostrándole un problema tipo. Se trata más bien de analizar si la actividad cumple con las condiciones de representar un verdadero reto, comprensible para el alumno y de que éste cuente con al menos una forma de resolverla de acuerdo con sus conocimientos previos.

2.2.3 Grupos numerosos

Uno de los obstáculos más grandes para aplicar el enfoque es la dificultad de gestionarlo en grupos numerosos en los que parece que se pierde el control tanto de la disciplina como de la garantía de que todos están aprendiendo.

No obstante los grupos numerosos representan un problema no sólo en esta forma de trabajo sino en cualquiera otra y trabajar de manera tradicional con estos grupos de ninguna manera garantiza que todos los alumnos aprenden por el simple hecho de que parezca que están poniendo atención a lo que el maestro explica.

Muchas de las actividades propuestas pueden trabajarse con grupos numerosos pero otras no, para estas últimas puede dividirse al grupo en dos partes y poner a trabajar a la mitad del grupo en una actividad que no requiera la supervisión directa del maestro mientras él trabaja con la otra mitad; luego intercambia los papeles.

2.3. Gestión de las actividades

2.3.1 Uso del libro de texto y del fichero de actividades didácticas

Los materiales de apoyo oficiales como el libro de texto y el fichero de actividades son los portadores de la propuesta de trabajo, en ellos se concretizan los lineamientos del enfoque y de la didáctica de los contenidos.

Las lecciones del libro de texto fueron pensadas y elaboradas para auxiliar al maestro en sus clases diarias, no obstante se sabe de la dificultad que los maestros tienen al trabajar el libro de texto y la falta de comprensión hacia el papel que juegan las actividades ahí propuestas.

Algunos docentes tienen una especial preocupación por evitar que los alumnos se equivoquen al resolver las lecciones, es decir, consideran que las lecciones tienen actividades para aplicar el contenido que se va a trabajar, así que muchos deciden trabajar el contenido antes de resolver el libro, lo cual no fue precisamente lo que planearon los autores de los textos. Muchas de las actividades del libro de texto son para construir, por ello se debe dejar que los niños se acerquen a ellas y las resuelvan con sus conocimientos previos, incluso si son erróneos, el momento de confrontación y validación será una oportunidad para trabajar con esos errores que, vistos desde este enfoque, forman parte del proceso de aprendizaje del alumno.

Antes de trabajar una lección es necesario que el docente la resuelva y la analice. Al resolverla podrá prever si el nivel de dificultad es adecuado para sus alumnos, los posibles procedimientos que podrán usar, los errores que pueden cometer. También estará en mejores posibilidades de decidir qué partes va a trabajar en equipo, en parejas, individual o grupal. Sabrá en cuáles momentos conviene hacer una confrontación y cuáles actividades puede dejar de tarea sin que esto ocasione dificultades.

También es importante que los estudiantes traten de resolver las lecciones haciendo uso de sus conocimientos previos, no importando que se equivoquen, en el momento de la confrontación y con las orientaciones del profesor serán los mismos niños quienes validarán los aciertos e identificarán los errores.

2.3.2 Falta de tiempo

Para trabajar este enfoque se requiere mucho tiempo y es probable que los maestros piensen que, si deciden aplicarlo, no terminaran el programa de estudio. Algunos maestros regresan a prácticas tradicionales por la falta de tiempo para trabajar con el enfoque de resolución de problemas. Pareciera que es más importante cubrir un programa en lugar de poner en primer plano el aprendizaje de los alumnos, no tiene caso enseñar con el modelo aprendo-aplico porque les “ahorra tiempo”, si se reflexiona al respecto se verá que esto es un autoengaño.

Por otro lado, si bien es cierto que esta forma de trabajo demanda más tiempo que la identificada como “tradicional” también es cierto que esto puede deberse a una mala organización del trabajo, del grupo y del contenido a enseñar.

Una buena costumbre es revisar con anticipación la lección o la actividad a trabajar para decidir cómo organizar la clase, es decir, planear con sumo cuidado la manera en que se invertirá el tiempo. De antemano se sabe que la planeación no siempre puede llevarse a cabo tal y como se previno pero es mucho mejor que llegar a improvisar la clase.

Pero, ante este problema, lo primordial es preguntarse qué es lo más importante: que los alumnos construyan un conocimiento que tenga sentido para ellos o que se cubra un programa de estudios a como dé lugar, incluso sacrificando la comprensión de los niños.

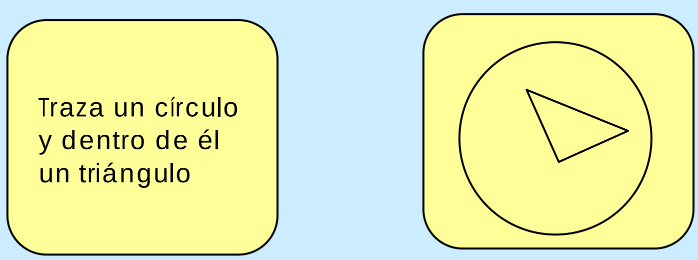
2.3.3 Falta de comprensión lectora

Otro obstáculo para dejar trabajar a los alumnos solos es la falta de comprensión lectora que tienen. Los alumnos no entienden lo que leen y por ello muchas veces no saben qué hacer.

Ante este problema es muy importante tener paciencia y, en un principio, dedicar un tiempo a tratar de desarrollar en los alumnos esta comprensión. Una estrategia es repartir a los alumnos que leen mejor entre los equipos y nombrarlos para que ellos lean en voz alta la actividad mientras los demás siguen la lectura, es probable que esto tarde en funcionar pero no tiene ningún sentido abandonar la práctica de que los alumnos lean porque no saben leer, se caería en un círculo vicioso.

Otra estrategia es que al iniciar un niño lea en voz alta lo que se tiene que hacer, y se dediquen algunos minutos a preguntar a los alumnos lo que entendieron que tenían que hacer, si bien es cierto que hay que dedicar tiempo a esto también lo es el hecho de que poco a poco los alumnos aprenderán el lenguaje de las consignas de los libros de texto y desarrollarán la comprensión del mismo. Es cuestión de paciencia y tolerancia, poco a poco se verán los resultados.

También puede diseñarse tarjetas con actividades de comprensión lectora en donde se escriban instrucciones sencillas como:



Y detrás de la tarjeta la solución para que el mismo niño se dé cuenta si comprendió la instrucción. También puede hacerse como actividad diaria que el maestro escriba una instrucción sencilla en el pizarrón, los alumnos lean en silencio y lleven a cabo la actividad, después se comenta.

La comprensión lectora es imprescindible para el aprendizaje de cualquier área de conocimiento.

2.3.4 Dificultad para trabajar en equipo[6]

El trabajo en equipo es difícil de gestionar cuando el grupo no está acostumbrado a esta forma de organizar la clase. A veces en los equipos hay algún o algunos alumnos que hacen el trabajo de los otros mientras estos últimos sólo esperan a que "el listo" diga cómo hacer o cuál es el resultado para anotarlo sin que haya discusión al interior del equipo. Otros problemas que se reportan es el hecho de que se pierde tiempo en lo que los alumnos forman los equipos y de que en general el ambiente de clase es indisciplinado.

A pesar de ser una de las principales características del enfoque propuesto, los materiales oficiales no aportan muchos elementos para que el maestro lleve a cabo esta modalidad de organización del grupo ni se aporta sugerencias de solución a posibles dificultades que puedan surgir. Parece ser que se suponía que la simple disposición espacial y el planteamiento del problema darían lugar a que los alumnos realmente hicieran un trabajo de equipo, la realidad es muy distinta. El trabajo en equipo es complejo y su éxito depende de muchos factores, es difícil de gestionar en el aula escolar y no se da de manera natural entre los alumnos. La realidad es que si no se ha fomentado esta forma de trabajo, los estudiantes rara vez interactúan entre ellos para llegar a soluciones.

Entre los factores que influyen en el trabajo en equipo está, sin lugar a dudas, la situación problemática propuesta. No todas las actividades promueven realmente el trabajo en equipo por eso es importante hacer una selección adecuada de las mismas. También influye la habilidad que el maestro tenga para conformar los equipos y para intervenir cuando está monitoreando su trabajo. Otro factor importante es la madurez del grupo para esta manera de organizarse, madurez que se puede alcanzar con un trabajo adecuado.

Es posible que haya alumnos que no quieran trabajar en equipo porque no se saben integrar, o que haya alumnos que no los acepten en ningún equipo; que haya equipos que no trabajen en conjunto sino que cada uno lo esté haciendo individualmente; que haya alumnos que estén esperando lo que otro hace para copiarle; que haya alumnos que, aprovechando la disposición del mobiliario, se pongan a platicar de otros asuntos; alumnos que funjan como dictadores al interior del equipo, etc.

Se sugiere mucha paciencia a este respecto. Es muy probable que los alumnos tarden en aprender a trabajar en equipo y que haya muchos ajustes antes de que comprendan y lleven a cabo de la mejor manera esta modalidad de trabajo.

Tratar de concienciar a los alumnos: todos son responsables del trabajo y cada uno debe aportar ideas. Una buena estrategia es decir a los alumnos que se elegirá al azar al integrante para pasarlo al frente en el momento de la confrontación y es responsabilidad del equipo asegurarse que todos serán capaces de explicar frente al grupo el procedimiento que utilizaron. Cada alumno debe sentir su participación como necesaria e importante.

Insistir en esta modalidad de organización variando los integrantes del equipo hasta notar que un trabajo cooperativo y colaborativo. A este respecto es de suma importancia el conocimiento que el maestro tenga de los alumnos. Habrá ocasiones en que funcione que cada quien elija con quien quiere trabajar, en principio se puede probar esta forma, pero también es bueno formar equipos de trabajo tratando de que los alumnos más adelantados queden con otros rezagados cuidando que los primeros no tomen el papel de líderes o dictadores.

2.3.5 Complejidad del momento de validación y confrontación de resultados

Éste es uno de los aspectos más difíciles de implementar en la práctica. Muchas veces los alumnos saben más de lo que pueden explicar. La comunicación de procedimientos y resultados a los compañeros es una habilidad que también debe desarrollarse. Poco a poco los alumnos serán más explícitos. Muchos alumnos, ante la indicación: *Explica cómo encontraste el resultado*, dan respuestas como:

♦ *Pensando*

♦ *Viendo y pensando*

♦ *Calculando*

♦ *Multiplicando*

Respuestas que están muy lejos de ser lo que se espera.

Otro punto muy relacionado con el anterior pero que implica aún más es el de la validación de resultados, es decir, explican el procedimiento y escuchan otros procedimientos pero si se llega a resultados diferentes hay que tratar de validar el que sea correcto, tarea nada fácil para los niños.

Un obstáculo a vencer es la falta de hábito de los alumnos a escuchar lo que sus compañeros dicen; es probable que los niños guarden silencio cuando el maestro habla, debido al contrato didáctico que por años han manejado, pero puede ser que cuando el compañero habla no se ponga la atención debida. Saber escuchar es una habilidad y como tal se puede desarrollar.

Hay que insistir con los alumnos en que sean más explícitos al platicar sus procedimientos, pasar a los compañeros que han desarrollado más su habilidad de comunicación oral para que los demás escuchen y con el tiempo, poco a poco, todos los alumnos logren explicitar sus procedimientos de resolución.

Por ejemplo, ante la respuesta *Pensando*, seguir cuestionado sobre ¿pensando qué? o ¿qué pensaste?. Al explicar a otros un procedimiento el alumno aprende a poner en orden su pensamiento y toma conciencia de lo que hizo.

Una estrategia didáctica que puede seguir el maestro es responsabilizar a los alumnos de los procesos de validación, devolverles a ellos esta tarea. En lugar de que sea el docente quien diga a los alumnos si están bien o mal, plantear preguntas como:

- *Lety, ¿qué opinas de lo que hizo (o dijo) Juan?*

- *¿Qué opinan de lo que hizo este equipo?*

Por otro lado, es probable que la misma actividad no tenga la riqueza didáctica para dar lugar a una buena confrontación. Es importante que el maestro valore cuándo es pertinente la confrontación y validación grupal y cuándo no es **necesaria. No todos los días y en todas las actividades debe llevarse a cabo.**

2.4. Condiciones externas

En este tipo de obstáculos y dificultades es en donde se tiene menos probabilidad de incidencia. La *falta de continuidad en el trabajo* se refiere al hecho de que algunos maestros apliquen o traten de aplicar el enfoque de resolución de problemas y otros no, implica un problema en el sentido de que los profesores sienten que su trabajo no tendrá continuidad, de que pueden perjudicar a los alumnos más que beneficiarlos porque los desestabilizan.

La presión de los padres de familia puede representar un fuerte obstáculo. Los padres, desde su concepción de lo que es aprender Matemáticas, piensan que los alumnos no están aprendiendo cuando no queda algún registro en los cuadernos o en el libro, muchos catalogan al mejor maestro como el que llena cuadernos con muchos ejercicios.

No obstante que en el enfoque se invita a considerar los procedimientos de los alumnos, los errores, sus argumentos de validación, en las *evaluaciones externas* no se dan cabida a todos estos aspectos y lo que se pide son resultados correctos. De ahí que piensen que siguiendo una educación tradicional tienen más probabilidades de que sus alumnos aprueben dichos exámenes.

Es curioso que si con el enfoque de resolución de problemas se desarrollan tantas habilidades sin descuidar los contenidos se piense que los alumnos salen mal en las evaluaciones externas precisamente porque “aprendieron con el enfoque”, si se profundiza, seguramente hay alguna otra situación que no está permitiendo al alumno contestar correctamente su examen, incluso es probable que contesten mal el examen porque no se aplica de manera adecuada el enfoque propuesto.

La falta de espacio e inadecuado mobiliario escolar también son dificultades para aplicar el enfoque propuesto. Hay escuelas en que las bancas de los alumnos no permiten la organización en equipos porque están pegadas al piso o porque el espacio es tan pequeño que sólo pueden acomodarse en filas.

Se puede aprovechar las Juntas de Consejo para platicar acerca del enfoque y de la importancia de tratar de que haya continuidad en el trabajo. También es útil e importante dar a conocer a los padres la manera en que se está trabajando y, sobre todo, hacerlos vivir esta forma de enseñar Matemática, esto también es benéfico para orientarlos acerca de cómo apoyarlos en las tareas Por otro lado, hay que enfrentar al alumno a exámenes de todo tipo, después de todo también forman parte de los problemas a los que se enfrentará en su vida, por ejemplo, cuando haga exámenes para ingresar a una escuela de nivel medio. Si no se puede trabajar en equipo porque el mobiliario no lo permite, los alumnos pueden trabajar en parejas o incluso en ternas para generar las discusiones.

Comentario final

No obstante que al intentar aplicar el enfoque de resolución de problemas para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas el maestro puede enfrentar varios de los problemas mencionados, es de suma importancia valorar que con este enfoque el principal beneficiado es el alumno: no sólo adquiere conocimientos sino que desarrolla habilidades y actitudes, entre ellas un gusto especial por la materia. A los alumnos les gusta el ambiente que se genera y esperan con entusiasmo sus clases de Matemáticas.

Se invita al docente a que pruebe esta forma de trabajo, poco a poco, quizás en un principio con los temas en los que se sienta más seguro o con aquellos para los que conoce una buena actividad o juego. Notará los cambios que se producen en el aula y en los alumnos y verá que vale la pena hacer un esfuerzo, recuérdese que lo más importante no es cubrir un programa, ni terminar un libro, ni quedar bien con los padres o salir bien en las evaluaciones externas, lo más importante son los alumnos y hacia su beneficio deben estar encaminadas las acciones de la práctica del docente.

---

[1] Las investigaciones realizadas por Ávila y Block constituyen dos importantes fuentes del estudio del impacto de la reforma de la enseñanza de las Matemáticas, varias de las ideas plasmadas en este documento provienen de estas investigaciones. Para el lector interesado en profundizar más al respecto, las referencias completas son:
Ávila, A. et. al. (2004). *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía de aprendizaje en nuestras escuelas*. México, SEP.
Block, D., et. al. (2004). *Papel del taller "La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria". En los procesos de apropiación de la propuesta curricular de 1993.* Investigación financiada por la Coordinación General de Actualización y Capacitación para Maestros en Servicio (lo que hoy es la Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio).

[2] Libro para el maestro. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP)

[3] Libro para el maestro. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP)

[4] Libro para el Maestro. Matemáticas. Primer grado. (SEP)

[5] En el libro para el maestro de quinto y sexto grado se explica en qué consiste cada una de estas habilidades.

[6] Para el lector interesado en lo relacionado con el trabajo en equipo se recomienda la tesis de maestría presentada en 1997 por Juan Leove Ortega: *El trabajo en equipo como un espacio de socialización del conocimiento matemático: una experiencia con maestras y maestros*. Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV.

Enseña a resolver problemas aritméticos con ayuda de representaciones

Fortino Escareño Soberanes

¿Cuál es el papel de la resolución de problemas en el salón de clases? ¿Qué estrategias didácticas deben emplearse para hacer de nuestros alumnos buenos resolutores de problemas?

Con frecuencia los maestros manifiestan su preocupación porque sus alumnos no saben resolver problemas. "Los niños tienen dificultades para entender los problemas escritos"; "parece que pueden resolver algunos problemas aritméticos que enfrentan en su vida cotidiana, pero no los que se le plantean en la escuela"; "cuando les planteo un problema, muchos alumnos me dicen: 'dígame qué operación tengo que hacer y entonces sí lo resuelvo'".

Sin embargo, no es común ver que a esta preocupación le siga una puesta en práctica de alguna estrategia de enseñanza que ayude a los alumnos a que desarrollen habilidades de resolución de problemas. Generalmente se espera que los alumnos adquieran esa habilidad por sí solos. Las razones que se dan son diversas. La que los profesores esgrimen más a menudo es que siempre están presionados por la gran cantidad de contenidos que tienen que enseñar para que los alumnos puedan enfrentar los problemas del siguiente nivel educativo. La demanda por cubrir el material es grande, y aunque la mayoría de los profesores estaría de acuerdo en que el uso de una diversidad de estrategias y recursos es ventajoso, muchos creen que este proceso es un lujo que no pueden darse por las restricciones que les impone el tiempo.

En este artículo partimos de la premisa de que es mucho mejor destinar tiempo a trabajar pocos problemas, desde diversas perspectivas, que resolver muchos usando una misma estrategia. El primer acercamiento es particularmente valioso si las soluciones provienen de las ideas e intuiciones de los alumnos. Por una parte, si las soluciones tienen este origen, los alumnos se sentirán capaces de usar sus propios recursos para dar sentido a nuevas situaciones matemáticas y tendrán más confianza en sus propias habilidades. Por otra parte, al usar una sola estrategia para resolver muchos problemas, se corre el riesgo de que los alumnos la tomen como una receta que no entienden y consecuentemente no pueden aplicarla en la resolución de los demás problemas.

El punto de vista de Polea

El matemático más conocido por su conceptualización de las matemáticas como resolución de problemas y por su trabajo por hacer de la resolución de problemas el centro de la enseñanza de las matemáticas es George Polya. De hecho, la mayoría de las investigaciones sobre resolución de problemas en los pasados 25 años y gran parte de la investigación actual ha "redescubierto" a Polya y usa su trabajo como punto de partida. Su obra "Cómo plantear y resolver problemas" (How to Solve It, 1957) es referencia obligada en el enfoque de enseñanza basada en la resolución de problemas.

Según Polya, resolver problemas significa “hacer problemas”, con énfasis en el descubrimiento; el uso de estrategias de resolución de problemas ayuda a entender mejor un problema o a avanzar en su solución. Algunas de las estrategias que propone para resolver problemas son: considerar un problema más simple, reformular el problema, descomponer el problema, utilizar figuras, esquemas, diagramas o listas ordenadas, explorar problemas relacionados, usar la deducción lógica, los procedimientos de aproximaciones sucesivas, de ensayo y error y trabajar hacia atrás.

Polya estableció cuatro fases en la resolución de problemas: comprensión del problema, establecimiento de un plan de resolución, ejecución del plan y visión retrospectiva. Debe observarse que estas fases son muy generales y flexibles y menos lineales y rígidas que las que se proponen en algunos libros de texto y que supuestamente las han adoptado. Según Polya, el propósito principal que debe tener en mente el profesor que enseña matemáticas debe ser desarrollar habilidades para resolver problemas. En primer lugar, los problemas que plantee deben ser adecuados: ni muy fáciles ni muy difíciles; deben ser naturales e interesantes, que desafíen la curiosidad de los alumnos; debe destinar un tiempo suficiente para presentarlos adecuadamente; finalmente, debe prestar ayuda a los alumnos, ni tan poca que no les permita avanzar; ni demasiada, que los limite a ser espectadores.

La planeación de la enseñanza centrada en problemas requiere tiempo y cuidado. La resolución de problemas no debe considerarse una unidad de estudio a la que se le destina un tiempo determinado para luego olvidarla por el resto del curso, sino que debe integrarse a todos los temas y trabajarse continuamente.

Al momento de enfrentar un problema, los alumnos llevan varios niveles de conocimiento, comprensión y habilidades, lo cual debe aprovecharse para que a todos les quede claro que los problemas pueden resolverse de varias maneras. Al examinar y discutir las estrategias utilizadas por alumnos diferentes, deben señalarse los vínculos entre esas estrategias y los conocimientos aplicados en la resolución del problema en cuestión.

La resolución de problemas debe tener sentido para los alumnos

En la vida cotidiana, las personas escolarizadas y no escolarizadas utilizan estrategias que normalmente no se usan en la escuela (Hiebert, 1992). Si a los alumnos se les da la oportunidad de que utilicen procedimientos inventados por ellos mismos, se propicia que el trabajo escolar se realice en un nivel de abstracción tal que los alumnos pueden desempeñarse con eficacia. Paralelamente, se propicia el surgimiento de múltiples formas de obtener una misma respuesta, con lo que se cumple con una meta importante del enfoque de resolución de problemas.

Si los alumnos resuelven los problemas colaborativamente, compartiendo ideas, estructurando explicaciones y dando sentido a las ideas de los otros, pueden convencerse de que los problemas pueden resolverse en más de una forma. Las investigaciones han mostrado que en las aulas en que se discuten múltiples soluciones a los problemas se tienen mayores niveles de aprovechamiento (Carpenter et al., 1989); que los alumnos que utilizan estrategias intuitivas son más exitosos que los que no lo hacen (Kieran, 1992) y que los profesores deben propiciar que los estudiantes construyan sus conocimientos sobre sus ideas intuitivas (Battista y Larson, 1994).

Los profesores necesitan alentar a sus alumnos a que lean y encuentren sentido a los problemas y evitar la enseñanza los estilos de enseñanza basados en recetas, como el siguiente: “Leti tiene 5 faldas y 4 blusas, ¿de cuántas maneras distintas se puede vestir Leti?, el diagrama con que se resuelve es tal y se procede de la siguiente manera”

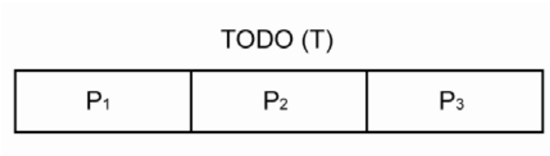
El plan de estudios de educación básica introdujo hace ya más de diez años el enfoque de resolución de problemas en los programas de matemáticas. Para fortalecer este enfoque, la Secretaría de Educación Pública ha elaborado una diversidad de materiales de apoyo a la enseñanza: Libros para el maestro, ficheros, lecturas para los profesores, etcétera. Sin embargo, la cuestión persiste, los profesores tienen dificultades para aterrizar el enfoque, quizá porque las propuestas de solución que se han ofrecido son demasiado ambiciosas.

La propuesta que se presenta en este artículo consiste en que el profesor use de modo sistemático diversas representaciones (tablas, gráficas, diagramas, esquemas, dibujos, etc.) que ayuden a los alumnos entender los problemas aritméticos que se les plantean. Partimos de la idea de que una de las capacidades más importantes que los alumnos deben desarrollar en la escuela es la de poder reproducir las relaciones fundamentales entre los datos de un problema mediante algún tipo de representación y de este modo utilizar alguna estrategia de solución. Si bien la forma de hacer estas representaciones es personal, pues depende de la manera propia de interpretar el problema, hay algunas ideas generales que pueden y deben enseñarse a los alumnos y que de practicarse sistemáticamente, pasarán a formar parte del acervo de recursos técnicos a utilizar en la resolución de problemas. En este punto se centrará el presente trabajo.

Campistrouz y Rizo (1993) sugieren que en la escuela primaria se utilicen de modo sistemático cuatro tipos de representaciones: lineales, tabulares, conjuntistas y ramificadas para establecer el significado práctico de las operaciones aritméticas y como base para comprender y dar sentido a la resolución de problemas aritméticos. En lo que sigue se presentan algunos ejemplos de su uso. Se destina un apartado al uso de las representaciones en el establecimiento del significado de las operaciones aritméticas con números naturales y fraccionarios y otro más para dar sentido a la resolución de problemas aritméticos. Muchos de estos problemas han sido tomados de los libros de texto gratuitos de 3º, 4º, 5º y 6º grados de educación primaria de la SEP (en lo que sigue, se designarán con la abreviatura LTG); otros más son adaptaciones de problemas del libro Proyecto de Inteligencia “Harvard”, (que designaremos con la abreviatura PIH) de Miguel Megía (1992), los cuales se incluyen porque consideramos que su tratamiento puede ser provechoso para los profesores.

El significado de las operaciones aritméticas

Para establecer el significado de las operaciones aritméticas resulta muy conveniente utilizar la relación parte-todo. Esta relación conecta al conjunto completo (el todo) con los subconjuntos que lo conforman (las partes). En el dominio de los números naturales, esta relación que se establece entre cantidades tiene las siguientes propiedades:



- La descomposición del todo da lugar a dos o más partes.
- La reunión de las partes da como resultado el todo.
- El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

La relación parte-todo puede ilustrarse mediante representaciones lineales simples, por lo que resulta muy útil su uso en el establecimiento del significado de las cuatro operaciones aritméticas fundamentales, como se verá a continuación.

Significados de la adición y sustracción de números naturales

<u>1. Primer grupo de significados</u>

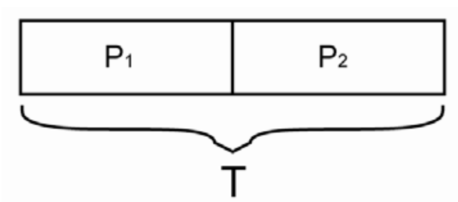
1.a. Dadas las partes, hallar el todo.

$P_1 + P_2 = T$

1.b. Dado el todo y una de las partes, hallar la otra parte.

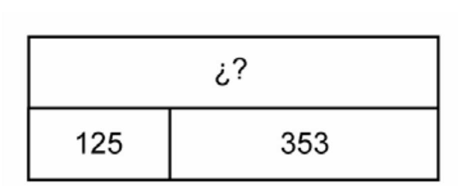
$T – P_1 = P_2$

$T – P_2 = P_1$



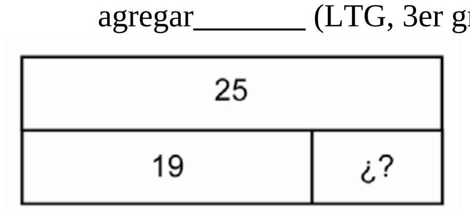
La representación lineal es la misma, lo que cambia es lo que se quiere encontrar.

- Leti y Ana contaron que el zoológico es muy bonito. Ahora todos los niños quieren visitarlo. Están juntando dinero para alquilar un autobús. La semana pasada se juntaron $125 y esta semana $353. ¿Cuánto dinero se ha reunido para el autobús? (LTG, 3er grado, Pág. 63.)



Se dan las partes y se quiere encontrar el todo.
125 + 353 = 478

- Luis, Mónica y Toño van a colocar 25 hojas en un lazo. Luis dice: Puse 19, me falta agregar_______ (LTG, 3er grado, Pág. 36-37.)



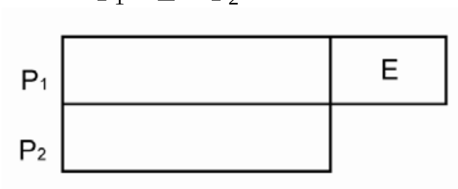
Se da el todo y una parte y se quiere hallar la otra parte.
25 – 19 = 6

<u>2. Segundo grupo de significados</u>
2.a. Dada una parte y el exceso de otra sobre ella, hallar la otra parte.

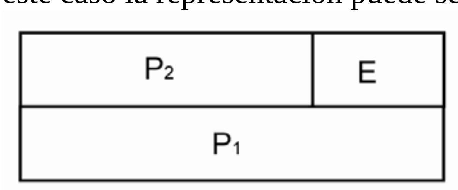
$P_2 + E = P_1$

2.b. Hallar el exceso de una parte sobre otra, o dada la parte y su exceso sobre otra, hallar la otra parte.

$P_1 - P_2 = E$
$P_1 - E = P_2$

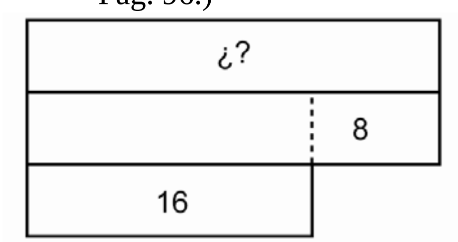


Este significado puede reducirse al primero ya que una parte es igual a parte de la otra. En este caso la representación puede ser la siguiente:



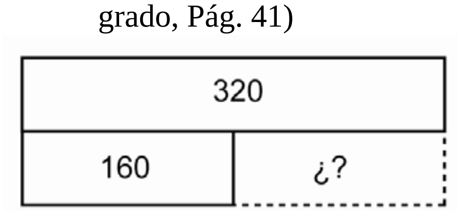
Obsérvese que la parte mayor puede ser considerada como un todo.

- El papá y el tío de Paco son granjeros. Su papá tiene 16 vacas y su tío tiene 8 más. ¿Cuántas vacas tiene el tío de Paco? (Variante de un problema del LTG, 3er grado, Pág. 96.)



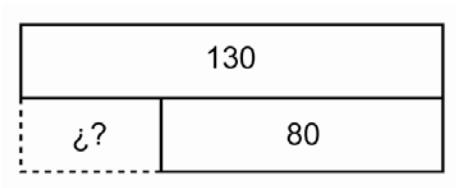
Se da una cantidad y el exceso de otra, para hallar la otra.
16 + 8 = 24

- Toño, Mónica e Itzel cuentan los frijoles que hay en varios frascos. Toño contó 160; Mónica 320, e Itzel 2100. ¿Cuántos frijoles más contó Mónica que Toño? (LTG, 3er grado, Pág. 41)



Dadas dos cantidades, hallar cuánto excede una de la otra.
320 – 160 = 160

- Arturo tiene una caja con 130 canicas. Él tiene 80 canicas más que Luis. ¿Cuántas tiene Luis? (Matemáticas 3er grado, Editorial Pueblo y Educación, Cuba).



Dada una parte y su exceso sobre la otra, hallar la otra.
130 – 80 = 150

Obsérvese que en los dos últimos problemas se utilizó la palabra más; sin embargo, los problemas son de sustracción. Es conveniente considerar este tipo de problemas con el fin de desalentar la práctica común de los alumnos que consiste en tratar de “adivinar” la operación que debe realizarse, con base en las “palabras claves” que aparecen en el enunciado de los problemas.

Significados de la multiplicación y división de números naturales

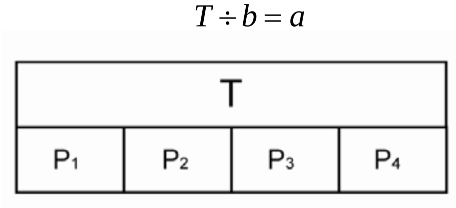
Cuando las partes del todo son iguales, se pueden establecer algunos significados para las operaciones de multiplicar y dividir mediante la relación parte-todo.

1. Significados de la multiplicación
1.a. Reunión de partes iguales para hallar el todo (suma de sumandos iguales).
1.b. Dado el número de partes y el contenido de cada parte, hallar el todo.

$$a \times b = T$$

2. Significados de la división
2.a. División partitiva: el todo se reparte en partes iguales (cuánto le toca a cada uno o cuál es el contenido de cada parte)
2.b. División tasativa: dado el todo y el contenido de cada parte, hallar el número de partes (cuántas veces cabe la parte en el todo).

$$T \div b = a$$



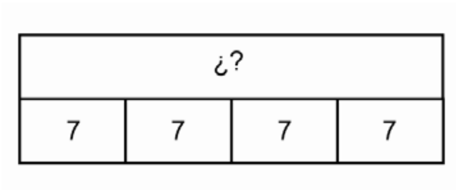
Hay *a* partes y en cada una hay *b* cosas
$P_1 = P_2 = P_3 = P_4$

- Don Chon, el dueño del puesto de abarrotes, hace tablas para facilitarse las cuentas (en la tabla se muestra que 1 kilo cuesta $12). ¿Cuánto cuestan 6 kilos de frijoles? (LTG, 3er grado, Pág. 99)

12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 72
o bien $6 \times 12 = 72$

Suma de sumandos iguales o reunión de partes iguales para hallar un todo.

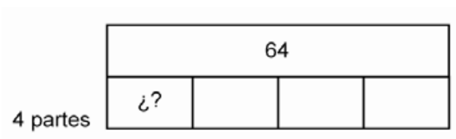
- Ana y Leti juegan al desfile. Leti dice: tengo que hacer 4 filas de 7 muñecos cada una. Mi desfile es de 4×7 muñecos. Es decir, de 28 muñecos. (LTG, 3er grado, Pág. 82)



Dada la cantidad de partes y el contenido de cada parte, hallar el todo.

$$4 \times 7 = 28$$

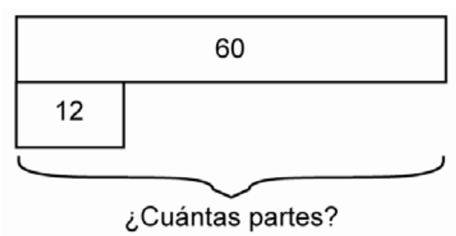
- Mónica, Itzel, Luis y Toño se van a repartir 64 canicas. ¿Cuántas crees que le tocarán a cada quien: 12, 16, 18 o 20? (LTG, 3er grado, Pág. 120)



El todo se reparte en partes iguales (hallar el contenido de cada parte. División partitiva)

$$64 \div 4 = 16$$

- La tía Lola pagó $60 por varios pares de calcetines. Cada par cuesta $12. ¿Cuántos pares de calcetines compró? (LTG, 3er grado, Pág. 99)

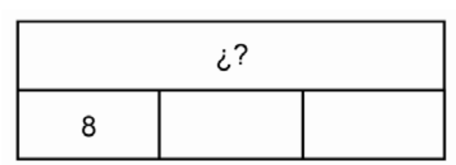


Dado el todo y el contenido de cada parte, hallar el número de partes (cuántas veces está contenido el todo. División tasativa).

$$60 \div 12 = 5$$

<u>3. La multiplicación como búsqueda de múltiplos</u>

- Pedro tiene 8 canicas. Luis tiene el triple. ¿Cuántas canicas tiene Luis?

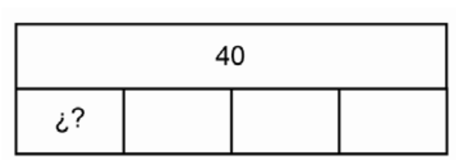


Hallar un múltiplo

$$3 \times 8 = 24$$

<u>4. La división como fracción de una cantidad</u>

- Juan tiene la cuarta parte de la edad de su papá. Si su papá tiene 40 años, ¿qué edad tiene Juan?

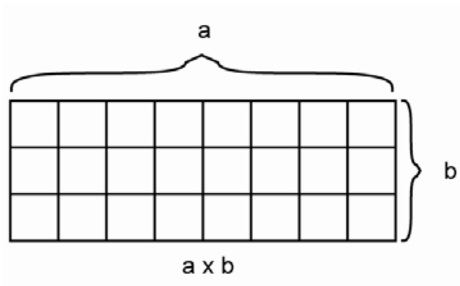


Hallar la fracción (cuarta parte) de una cantidad. Esta es una división tasativa: el todo (40) se reparte en 4 partes iguales.

$$40 \div 4 = 10$$

Hay otros significados de la multiplicación y la división que no están conectados directamente con la relación parte-todo. Por ejemplo:

5. Significado de área



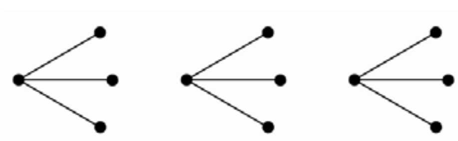
6. Restas sucesivas ¿Cuántas veces puede restarse el 3 del 12?

12 – 3 – 3 – 3 – 3 = 0

Se puede restar 4 veces el 3

$$\begin{array}{r} 4 \\ 3\overline{)12} \end{array}$$

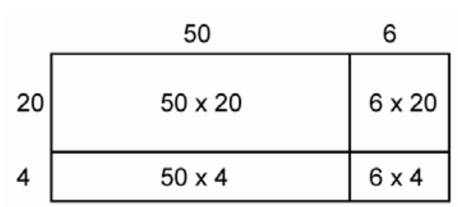
7. Conteo (Hallar el número de formas en que puede hacerse algo).



Para el conteo se pueden usar diagramas de árbol o ramificados. También se pueden usar tablas de doble entrada.

	a	b	c
1	a, 1	b, 1	c, 1
2	a, 2	b, 2	b, 2

- Resuelve las multiplicaciones que se indican para encontrar el resultados de 56×24. (LTG, 4º grado, Págs. 34 y 35.)



Significado de área:

$$50 \times 20 = 1000$$

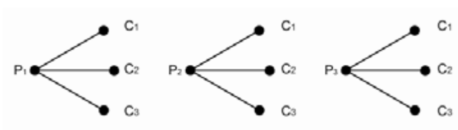
$$50 \times 4 = 200$$

$$6 \times 20 = 120$$

$$6 \times 4 = 24$$

$$Total = 1344$$

- Tengo 4 pantalones y 3 camisas. ¿Cuántas combinaciones diferentes puedo formar con ellas?



Problema de conteo:
$4 \times 3 = 12$

	P_1	P_2	P_3
C_1	P_1, C_1	P_2, C_1	P_3, C_1
C_2	P_1, C_2	P_2, C_2	P_3, C_2
C_3	P_1, C_3	P_2, C_3	P_3, C_3

- De un tinaco de 120 litros voy a llenar cubetas de 8 litros hasta que el tinaco quede vacío. ¿Cuántas cubetas puedo llenar?

  120
  8
  112 ----- 1
  8
  104 ---- 2

Restas sucesivas
$8\overline{)120}$

Significados de las operaciones con números fraccionarios

Las operaciones con números fraccionarios tienen los mismos significados que los descritos para los números naturales. Sin embargo, debido a la naturaleza de las fracciones, las operaciones, particularmente la multiplicación y la división, revisten características que hay que tener en cuenta al abordar los problemas. Cuando se opera con fracciones están presentes también las unidades. Deberá tenerse cuidado de no confundir las unidades con el todo generalmente son cosas distintas.

Significados de la multiplicación y división de fracciones

El concepto de fracción puede interpretarse como una relación parte todo.

La fracción es la razón entre la parte y el todo:
$\frac{P}{T}$

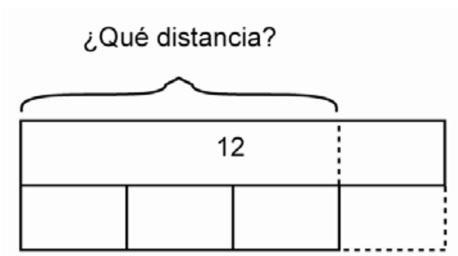
Desde esta interpretación de la fracción, pueden derivarse los siguientes tres problemas básicos de multiplicación y división de fracciones:

Parte	Todo	Fracción
¿?	☑	☑
☑	☑	¿?
☑	¿?	☑

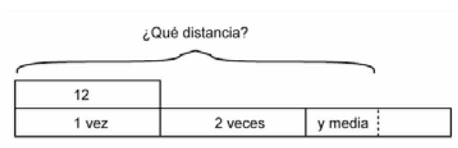
8. Se conoce el todo y la fracción y se quiere hallar la parte (problema de multiplicación)
9. Se conoce la parte y el todo y se quiere hallar la fracción (problema de división)
10. Se conoce la parte y la fracción y se quiere conocer el todo (problema de división).

Ejemplos:

- Un circuito de carreras de automóviles tiene 12 km de longitud. Calcula la distancia recorrida en $\frac{3}{4}$ de vuelta y en $2\frac{1}{2}$ vueltas. (LTG, 5º grado, Pág. 156.)



Dada la fracción y el todo, hallar la parte.

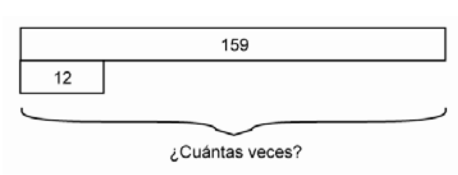


$$\frac{3}{4}\times 12 = 9$$

$$2\frac{1}{2}\times 12 = 30$$

En el primer caso, la fracción es menor que la unidad y la parte es menor que el todo. En el segundo, la fracción ($2\frac{1}{2}$) es mayor que la unidad y la parte es mayor que el todo.

- La carrera completa son 159 km. ¿Cuántas vueltas habrá que dar al circuito? (LTG, 5º grado, Pág. 157.)

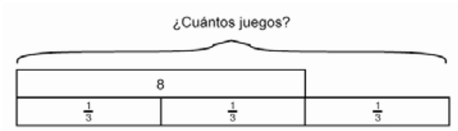


Se conoce la parte y el todo y se quiere hallar la fracción (problema de división).

$$\frac{159}{12} = 13\frac{3}{12} = 13\frac{1}{4}$$

La parte (159) es mayor que el todo (12) y la fracción es mayor que la unidad.

- Un equipo de béisbol ganó 8 de los juegos celebrados, los que representaban las dos terceras partes de ellos. ¿Cuántos juegos se celebraron? (Matemática, 5º grado, Editorial Pueblo y Educación, Cuba.)



Dada la parte y la fracción, hallar el todo.

$$8 \div \frac{2}{3} = 12$$

Interpretamos el problema de la siguiente manera: si 2/3 de los juegos son 8 juegos, 1/3 son 4 juegos y 3/3 (el todo) es el triple de 4, es decir, 12.

Las representaciones como apoyo para estimar resultados de problemas de multiplicación y división de fracciones

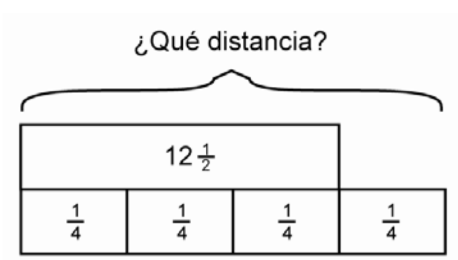
Si bien los programas de matemáticas de educación primaria no incluyen como contenido explícito los algoritmos de la multiplicación y la división de fracciones, los libros de texto gratuitos plantean muchas situaciones en las que se aplica la idea de multiplicar o dividir fracciones. Los alumnos pueden resolver (o estimar la solución) de estos problemas, si tienen una idea clara de los significados de estas operaciones. A continuación se presentan algunos ejemplos de este tipo de problemas, cuya solución se estima tomando como base las representaciones.

- Una lancha recorre $30\frac{1}{2}$ km en una hora. ¿Qué distancia recorre en $2\frac{1}{2}$ horas?

$$2\frac{1}{2} \times 30\frac{1}{2} = 76\frac{1}{4}$$

En 1 hora, la lancha recorre $30\frac{1}{2}$ km y en 2 horas recorre el doble: 61 km. En media hora recorre la mitad de $30\frac{1}{2}$, es decir, poco más de 15 km. Por lo que en $2\frac{1}{2}$ horas recorre poco más de 61 + 15 = 76 km.

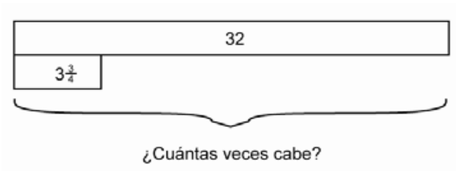
- Una ciclista recorre $12\frac{1}{2}$ km en $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Qué distancia recorre en una hora? (División partitiva.)



$$12\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = 16\frac{2}{3}$$

Si en tres cuartos de hora recorre $12\frac{1}{2}$ km, en un cuarto de hora recorre la tercera parte; es decir, un poco más de 4 km. Y en cuatro cuartos de hora (1 hora) recorrerá 4 veces 4 km, o sea 16 km.

- Una llave de agua da $3\frac{3}{4}$ litros de agua por minuto. ¿En cuántos minutos da 32 litros? (División partitiva.)



$$32 \div 3\frac{3}{4} = 8\frac{8}{15}$$

Si la llave diera 4 litros por minuto, tardaría 8 horas en dar 32 litros. Como da un poco menos que 4 litros ($3\frac{3}{4}$) tardará un poco más de 8 horas.

Uso de representaciones para resolver problemas

En este apartado se ejemplifica la resolución de problemas con apoyo de cuatro tipos de representaciones: lineales, tabulares, diagramas de árbol o ramificados y conjuntistas. Al momento de seleccionar problemas de los libros de texto gratuitos de la SEP para ilustrar el uso de estas representaciones, encontramos muchos para las lineales; menos para las tabulares, aún menos para los diagramas de árbol y ninguno para las conjuntistas.

Aunque la idea de este artículo no es dar a las formas de representación categoría de tema de estudio por sí mismo, sino recomendar su uso flexible para facilitar la comprensión de los problemas como punto de partida para buscar estrategias de solución, creemos que es necesario abrir un espacio en la planeación de las clases para incluir problemas como los que aquí se proponen, sin menoscabo de los que se plantean en los libros de texto gratuitos.

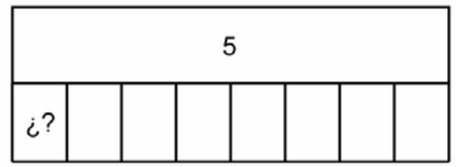
Representaciones lineales

Las representaciones lineales se utilizan, por lo general, cuando en el problema hay una sola magnitud en juego, en especial cuando aparecen relaciones de parte todo.

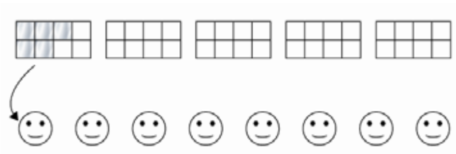
Tienen diversas formas: pictográficas (se hacen reproducciones de los objetos que intervienen), de segmentos, de rectángulos, entre otras. Los siguientes ejemplos ilustran la utilización de este tipo de representación.

- Alicia quiere repartir cinco galletas entre ocho niños, de manera que a todos les toque igual y que no sobre. ¿Cuánto le tocará a cada uno? (LTG, 5º grado, Pág. 72.)

No es fácil que los alumnos obtengan directamente la fracción 5/8 de galleta como respuesta al problema. Quizás una de las respuestas que se den sea “es un octavo de 5”, si el problema se interpreta como la siguiente relación:

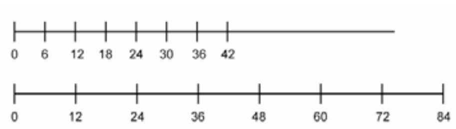


Para llegar a la fracción, es posible que los alumnos tengan que recurrir a alguna forma de representación que modele el problema, como la siguiente:



- ¿Crees que obtendrás el mismo resultado si multiplicas 7×6, que si multiplicas 7×12 y el resultado lo divides entre 2? (Variante de un problema del LTG, 5º grado, Pág. 30.)

Es importante que, además de resolver con lápiz y papel o con una calculadora este problema, los alumnos tengan la oportunidad de profundizar en el significado de estas dos operaciones con la ayuda de un recurso visual. Uno de ellos podría ser la recta numérica.



En el contexto de la recta numérica el producto 7×6 se interpreta como tomar 7 veces el 6 y el producto 7×12, tomar 7 veces el 12. La división entre 2 sería, por ejemplo, doblar a la mitad la segunda recta numérica para obtener 42.

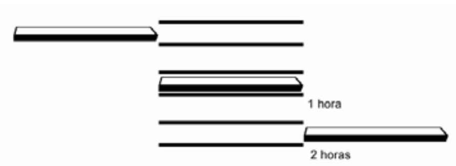
- Un caracol está en el fondo de un pozo de 5 m de profundidad. Durante el día alcanza a subir 3 m pero de noche cuando duerme resbala hacia abajo 2 m. ¿Cuántos días le llevará subir al pozo?

Es posible que muchos niños digan 5 días, que es la respuesta equivocada más frecuente; otros dirán 3 días, que es la respuesta correcta. En cualquier caso, lo más conveniente es asegurarse por medio de una representación visual. Una de estas representaciones es del siguiente tipo, en la que se ve claramente que al avanzar los 3 metros en el tercer día, el caracol quedará fuera del pozo.

- Un tren de 1 km de largo se mueve lentamente a 1 km por hora para pasar un túnel en reparación que tiene 1 km de largo. ¿Cuánto tiempo tardará el tren en salir completamente del túnel?

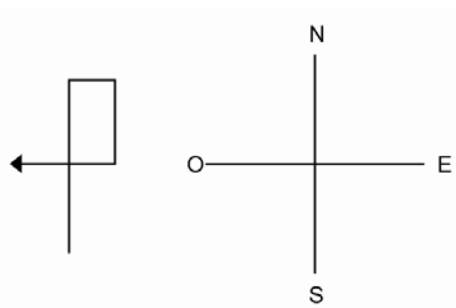
Puesto que tanto el túnel como el tren tienen 1 km de largo y el tren se mueve a 1 km por hora, lo más seguro es que los alumnos den 1 hora como respuesta. Quizás habría que agregar al enunciado del problema que el tren debe salir completamente del túnel.

Para simular este problema, se podría representar el tren con un lápiz, el túnel con el dibujo de dos segmentos paralelos y presentar los tres momentos de la situación como se indica enseguida.



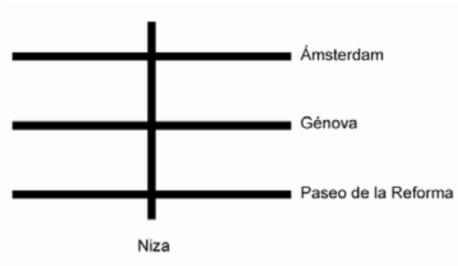
- Un taxi va viajando hacia el Norte. El conductor se da cuenta que equivocó el camino, se regresa, y luego da vuelta a la derecha. ¿Qué punto cardinal encuentra a la derecha?

Una estrategia sencilla de resolver el problema consiste en indicar con letreros los 4 puntos cardinales y que un alumno realice caminando las maniobras del taxi, a partir de la lectura del enunciado del problema. Enseguida, en vez de caminar por el aula para visualizar lo que hace el taxi, los alumnos representan gráficamente la trayectoria del taxi. La gráfica sería como la siguiente:



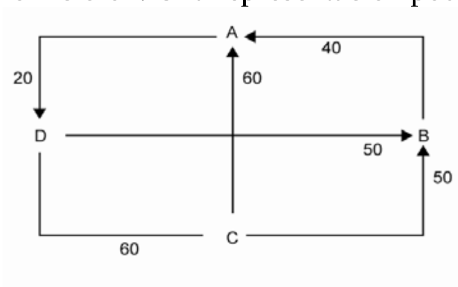
- La calle Génova es paralela al Paseo de la Reforma. La calle Niza es perpendicular a la calle Ámsterdam, que es paralela al Paseo de la Reforma. ¿La calle Niza es paralela o perpendicular a Génova? (Son calles de la ciudad de México).

En primer lugar hay que asegurarse de que los alumnos conocen el significado de “perpendicular” y “paralela”. Enseguida se puede leer en voz alta el problema y pedir a los alumnos que lo resuelvan mentalmente. Seguramente, algún alumno sugerirá que se trace un mapa para representar gráficamente lo que dice el problema, con lo que se tendrá la siguiente representación:



- Andrés, Beatriz, Carmen y David fueron a la feria. Durante el tiempo que estuvieron allí se prestaron dinero varias veces. Andrés le pidió prestados $40 a Beatriz y $60 a Carmen. Carmen le prestó $50 a Beatriz y le pidió $60 a David, quien a su vez pidió a Andrés que le prestara $20; y Beatriz pidió $50 prestados a David. Todas estas deudas pueden ser liquidadas de una sola vez. ¿Cómo se efectuaría esa liquidación? (PIH, Pág. 122.)

Vale la pena dar a los alumnos un tiempo razonable para que lo resuelvan. Lo interesante aquí es que se vea la necesidad de buscar estrategias de solución, dado que no es fácil visualizar el dinero cambiando de manos. Se requiere una representación gráfica en la que se registren todas las transferencias de dinero, es decir, los préstamos que cada uno hizo y le hicieron. Una representación podría ser la siguiente:



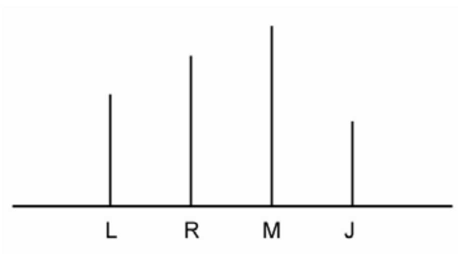
Con esta representación es fácil contestar las siguientes preguntas: ¿Cuánto prestó Andrés? ¿Cuánto le prestaron? ¿Cuánto debe o le deben? ¿Cuál es la situación de cada uno de los demás? ¿Quiénes tienen que poner dinero sobre la mesa? ¿Cuánto? ¿Quiénes deben tomarlo? ¿Cuánto cada uno?

- Un autobús sale de Monterrey a las seis de la mañana con destino a Saltillo. Un ciclista, que por supuesto se mueve mucho más lentamente que el autobús, sale de Saltillo rumbo a Monterrey una hora después. ¿Cuándo el ciclista se cruce con el autobús, ¿quién estará más lejos de Monterrey? (PIH, Pág. 137.)

El problema parece difícil, pero hay que esperar las respuestas de los alumnos. Es posible que alguno se dé cuenta que, en el momento en que se cruzan se hallan, obviamente a la misma distancia de Monterrey. Una forma de simular la situación consiste en lo siguiente: ponga las manos abiertas sobre el pizarrón, separadas una de otra por aproximadamente 50 o 60 cm. Cada una de ellas representa a una de las dos ciudades. Arriba de cada mano anote la ciudad que representa. Mueva la mano derecha hacia la izquierda y, enseguida, más lentamente, la izquierda hacia la derecha. Al momento de cruzarse, pregunte: ¿quién de los dos está más lejos de Monterrey?

- Luisa y María son más altas que Judith. Rosalía es más baja que María, pero más alta que Luisa. ¿Quién es más baja y quién le sigue en estatura?

No es fácil visualizar esta situación. Pero podría simularse en el aula haciendo representar a Luisa, María, Judith y Rosalía con algunas alumnas. Pasan al frente tres alumnas, cada una portando un letrero con el nombre de la persona que representa, las tres de distinta estatura, la más baja es Judith. Luego pasa Rosalía, que debe ser más baja que María y más alta que Luisa. En caso de que Luisa y María no cumplan las condiciones, intercambian los letreros.
Una representación visual de esta situación es la siguiente:



Representaciones tabulares

Las representaciones tabulares se utilizan cuando hay varias magnitudes o informaciones en juego. Se llaman tabulares pues la información se coloca, por lo general, en tablas de doble entrada. A continuación se presentan algunos ejemplos que ilustran este tipo de representación.

- Cuando en la ciudad de México son las 12 del día en Madrid son las 7 de la tarde. Un avión sale de la ciudad de México a las 6 de la mañana y realiza el viaje en 11 horas. ¿A qué hora aterrizó en Madrid (hora de Madrid)?

Hora / Ciudad	Salida	Llegada
México, D.F.	6 AM	5 PM
Madrid	1 PM	12 (medianoche)

La tabla se va completando, considerando cada ciudad: México, el avión sale a las 6 de la tarde y llega a su destino cuando en México son las 5 de la tarde. Madrid: cuando el avión sale de México, en Madrid es la 1 de la tarde, y llega 11 horas después, a las 12 de la noche.

- ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse al lanzar un dado y una moneda? (Las caras de los dados están marcadas con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6; las dos caras de la moneda son águila y sol.)

		Dado					
		1	2	3	4	5	6
Moneda	A	1, A	2, A	3, A	4, A	5, A	6, A
	S	1, S	2, S	3, S	4, S	5, S	6, S

Este es un problema de conteo, por lo que también puede resolverse con un diagrama de árbol. La enseñanza que dejan estas representaciones radica en que muestran la necesidad de realizar los conteos de modo sistemático, no queda fuera ninguna posibilidad. En este caso, son 12.

- ¿Hay más resultados pares o impares en la tabla de multiplicar?

Quizás los alumnos generen muchos ejemplos para conjeturar una respuesta. Otros quizás elaborarán la tabla de multiplicar para organizar su trabajo de búsqueda, como se ilustra en la siguiente representación:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Lo interesante de esta representación – y generalmente de todas las representaciones que genere cada problema – son los hallazgos que hagan los alumnos. Por ejemplo, algunos dirán que “cuando se multiplica un número par por otro par el resultado es siempre otro par.

En este punto, el profesor podría expresar esta generalización de la siguiente manera: “par x par = par”. A partir de aquí se podría intentar establecer otras generalizaciones.

- Joaquín, Pedro y Roberto desayunaron cosas diferentes. Uno comió huevos fritos, otro tostadas, y el otro una sincronizada. Joaquín no comió ni huevos fritos ni una sincronizada. Pedro no comió huevos fritos. ¿Quién comió una sincronizada?

En este problema hay dos informaciones en juego: las personas y lo que cada uno come, por lo que para resolverlo conviene utilizar una tabla de doble entrada:

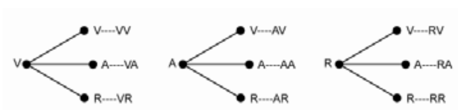
	J	P	R
H	X	X	✓
T	✓	X	X
S	X	✓	X

Si Joaquín no comió ni huevos fritos ni sincronizadas, lo que comió entonces fueron tostadas. Si Pedro no comió huevos fritos, tampoco comió tostadas, porque éstas las comió Joaquín; comió entonces sincronizadas. Por tanto, Roberto comió huevos fritos.

Representaciones ramificadas

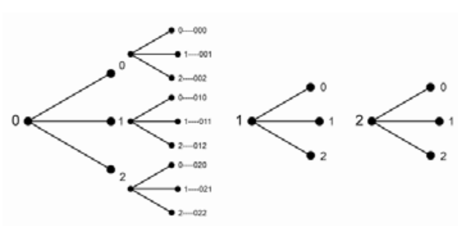
Las representaciones ramificadas o diagramas de árbol se usan básicamente en problemas de conteo y también en los de multiplicación donde se dan la cantidad de partes y el contenido de cada parte para hallar el todo. A continuación se presentan algunos ejemplos que ilustran este tipo de representación.

- Ángela y Jacinto tienen tres cubos iguales, uno verde, uno azul y uno rojo. Los ponen en una bolsa de papel, escogen uno sin ver, anotan el color que les salió y lo regresan a la bolsa. Después escogen otro cubo sin ver. Jacinto gana si salen dos cubos del mismo color y Ángela si salen dos cubos diferentes. ¿Se podría saber quien tiene más oportunidades de ganar? (LTG, 5º grado, Pág. 135)



El diagrama muestra que de las 9 resultados posibles, sólo en tres casos los cubos son del mismo color y en seis son de color diferente, por lo que Ángela tiene más posibilidades de ganar.

- Javier tiene un candado de seguridad y se le olvidó la combinación que lo abre. El candado tiene 3 cilindros. Y cada cilindro tiene los dígitos del 0 al 2; sólo hay una combinación de dígitos que permite abrir el candado. ¿Cuántas combinaciones crees que tendrá que probar Javier? (En una misma combinación los números pueden repetirse; por ejemplo, la 222 puede ser una combinación). (LTG, 6º grado, Pág. 80.)

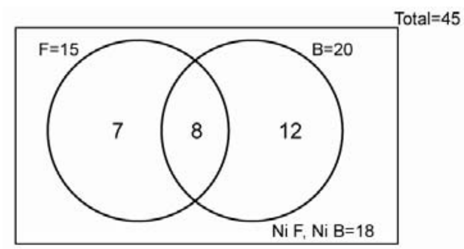


El diagrama muestra que la combinación puede empezar por cualquiera de los tres dígitos. Si empieza con ceros, hay 9 combinaciones diferentes: 000, 001, 002, 010, 011, 012, 020, 021, 022. Y también hay 9 combinaciones diferentes si empieza con 1 o con 2. Por lo que Javier podría probar hasta 27 combinaciones, si es que hasta el final acierta con la combinación correcta.

Representaciones conjuntistas

Los modelos conjuntistas se usan cuando la información que se da se refiere a diferentes propiedades o características que cumplen los elementos de un conjunto. Esto hace formar nuevos conjuntos de los que satisfacen las características pedidas. Enseguida se dan algunos ejemplos de problemas en los que se puede utilizar este tipo de representación.

- En una encuesta realizada entre los 45 alumnos de un grupo se encontró que 15 alumnos juegan futbol, 20 juegan básquetbol y 18 no practican ninguno de estos deportes. ¿Cuántos alumnos practican los dos deportes? ¿Cuántos practican futbol, pero no básquetbol? ¿Cuántos el básquetbol, pero no el futbol?



Si de los 45 alumnos del grupo, 18 no practican ninguno de los dos deportes, entonces, hay 27 que sí practican al menos uno de los dos. Por tanto, hay 8 que practican ambos deportes, 7 que sólo practican futbol y 12 sólo básquetbol.

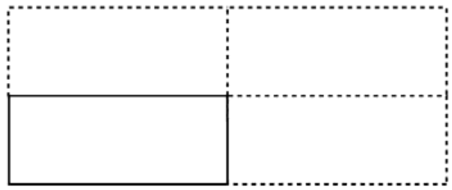
¿Cómo facilitar el desarrollo de las capacidades de representación de los niños?

A lo largo de toda la educación básica, debe brindarse a los alumnos oportunidades para que desarrollen y utilicen diversas formas de representar ideas matemáticas para modelar situaciones, buscar relaciones entre los datos disponibles en esas situaciones y justificar o rechazar conjeturas. Estas representaciones sirven de soporte visual a la reflexión sobre la resolución de los problemas y ayudan a comunicar los resultados de la reflexión.

Las buenas representaciones cumplen una doble función: son herramientas del pensamiento e instrumentos de comunicación (NCTM, 2000). Considere, por ejemplo, el siguiente problema:

- ¿Qué pasa con el área de un rectángulo si las longitudes de sus lados se duplican?

Seguramente los alumnos que representan el problema de alguna forma tendrán más posibilidades de observar relaciones que aquellos que no lo hacen. Éstos últimos podrían suponer y conjeturar que el tamaño del rectángulo resultante sería el doble con respecto del original, y detener aquí su reflexión. Otros podrían apoyar su reflexión mediante una representación como la siguiente:



y usar dicha representación para refutar la conjetura propuesta por sus compañeros. Este simple dibujo les ayudaría a abordar con más cuidado el problema y darse cuenta de su complejidad. Mostraría que el nuevo rectángulo no es sólo más grande, sino que es cuatro veces el tamaño del original.

En la introducción de este trabajo se aludió a la necesidad de poner en práctica una estrategia de enseñanza que ayude a los alumnos a desarrollar habilidades de resolución de problemas. Una parte esencial de esa estrategia radica en atender cuidadosa y deliberadamente la necesidad que los alumnos tienen de aprender a interpretar, utilizar y construir representaciones para apoyar su reflexión sobre la resolución de los problemas.

Pero no se trata de enseñar *formas* de representación (diagramas, dibujos, gráficas, tablas, etc.), como si fueran por sí mismas temas de enseñanza; más bien, su uso en el aula debe focalizarse en la importancia que revisten como herramientas para que los alumnos construyan su comprensión, comuniquen información y expliquen sus razonamientos. Debe brindarse múltiples oportunidades a los alumnos para que creen o seleccionen de modo flexible las representaciones que más se ajusten a cada situación que se plantee.

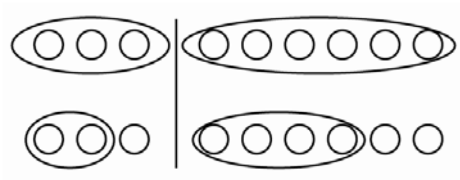
El profesor debe y puede hacer hincapié en la importancia de representar las ideas matemáticas. Puede hacerlo de diversas maneras. Por ejemplo:

- Presentando algunas formas de representar una misma situación. Algunos profesores podrían pensar que con esto se restaría oportunidades de desarrollo a los alumnos o que se limitaría su creatividad. Sin embargo, no hay que olvidar que también se aprende a resolver problemas viendo cómo lo hacen los buenos resolutores.

- Comentando por qué algunas representaciones son más útiles que otras en situaciones específicas; esto ayuda a que los alumnos aprendan a criticar aspectos de sus representaciones. Para ello, puede seleccionar la representación utilizada por algún o algunos alumnos y someterla a la consideración de la clase. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

- Al contar sus canicas, Juan ve que la mitad son blancas, un tercio rojas y el resto azules. ¿Cuál es el menor número de canicas que puede tener Juan? (LTG, 6º grado, Pág. 146).

Algunos alumnos representan las canicas con figuras y ensayan varias cantidades para ver si alguna de ellas los lleva a la solución:



Otros ensayan con números: buscan números que puedan cumplir con las condiciones dadas en el problema:

$\begin{array}{r}5\\2\overline{)10}\end{array}$ Sí $\begin{array}{r}3\\3\overline{)10}\end{array}$ No $\begin{array}{r}3\\2\overline{)6}\end{array}$ Sí $\begin{array}{r}2\\3\overline{)6}\end{array}$ Sí $\begin{array}{r}6\\2\overline{)12}\end{array}$ Sí $\begin{array}{r}4\\3\overline{)12}\end{array}$ Sí

Cuando los estudiantes empiezan discutir y a hacer algunas conjeturas basadas en cualquiera de estas dos representaciones. Por ejemplo, podrían decir que el número de canicas debe ser par, porque de otro modo no podría hablarse de la mitad de las canicas; también, debe ser un número del que pueda tomarse la tercera parte. Algunos podrían decir que son 12 canicas, de las cuales 6 son blancas, 4 rojas y resto (2) azules; otros, que son 6, y de este modo 3 serían blancas, 2 rojas y 1 azul, y que ésta es la mejor solución porque el problema pide el menor número de canicas. Es importante que el profesor vaya registrando todos estos hallazgos, pues constituyen una síntesis del pensamiento de los alumnos. En este punto, el profesor podría reformular el problema, con objeto de propiciar el establecimiento de la generalización. Si pregunta, por ejemplo: el número de canicas de Juan es mayor que 20, pero menor de 40, ¿cuántas canicas podría tener? ¿Cuál de las dos representaciones, de dibujos o numérica les parece más adecuada para resolver el problema?

Los profesores que escuchan con cuidado las ideas de sus alumnos y los ayudan a seleccionar y utilizar las representaciones que reflejan su pensamiento, contribuyen a que los alumnos se habitúen a usar estos recursos, y desarrollen habilidades para resolver los problemas y comunicar sus ideas a los demás.

Bibliografía

Battista, Michael T., y Carol Novilis Larson. *The Role of JRME in Advancing the Learning and Teaching of Elementary School Mathematics*. Teaching Children Mathematics 1, NCTM, 1994.

Campistrouz, Luis y Celia Rizo, *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, Cuba, 1993.

Carpenter, Thomas P. Et al., *Using Knowledge of Children's Mathematical Thinking in Classroom Teaching*. American Educational Research Journal 26, 1989.

Hiebert, James, *Learning and Teaching with Understanding*. En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York, Macmillan Publising Company, 1992.

Megía, Miguel y otros. Proyecto de Inteligencia "Harvard", serie IV, Resolución de problemas. Editorial Ciencias de la Educación Preescolar y Especial (CEPE). España, 1992.

NCTM. *Principles and Standards for School Mathematics*, Virginia, USA, 2000).

Kieran, Carolyn. *The learning and Teaching of School Mathematics*, en Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York, Macmillan Publising Company, 1992.

Polya, George. *How to Solve It*., Princeton University Press, USA, 1957 (versión en español, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1989).

Rizo, Celia y otros. *Matemática. Tercer grado*. Editorial Pueblo y Educación. Cuba, 1991.

Rizo, Celia y otros. *Matemática. Quinto grado*. Editorial Pueblo y Educación. Cuba, 1989.

Los números figurados

José Luis Córdova Frunz

NOTA: Se presenta la etimología de las palabras precedidas por un asterisco (p.ej. *cociente) en la sección 17. Los recuadros indican ejercicios para el maestro que con ligeras adaptaciones podrá aplicar en el aula; bastan unas 30 piedrecitas, semillas o monedas, por alumno.

1 Introducción

La enseñanza escolar de las matemáticas ha apuntado a diferentes objetivos en el curso de la historia. Ha buscado ser un instrumento para el desarrollo del pensamiento, o para la resolución de problemas concretos y cotidianos (p.ej. con las operaciones aritméticas fundamentales); ha apuntado también al desarrollo de la lógica y de las operaciones formales del sujeto, de la capacidad de inferencia y la identificación de patrones y regularidades. La gran diversidad de objetivos no se ha visto reflejada en una gran diversidad de métodos de enseñanza y de estrategias de clase.

En ocasiones, los objetivos y los contenidos están perfectamente definidos para cada nivel de escolaridad; lo que no significa que sean los más didácticos pues nunca se enseña "en abstracto", sino que siempre se enseña a alumnos *irrepetibles* de carne y hueso. Por ello la experiencia del profesor, su sensibilidad y su capacidad de inventiva y adaptación son fundamentales.

El material que aquí presentamos no es parte del curriculum oficial pero presenta de forma original algunos conceptos y operaciones aritméticos fundamentales, p.ej. multiplicación, división y divisibilidad, números primos y números figurados. Este último tema es el que más se desarrolla por su potencial didáctico en términos de:

1. identificación de patrones geométricos.
2. elaboración de figuras geométricas a partir de patrones.
3. reconocimiento de regularidades y estructuras en secuencias geométricas y numéricas.
4. desarrollo de la sensibilidad estética por el manejo de la proporción y la simetría.

Detrás de estas habilidades se encuentran los conceptos fundamentales del pensamiento abstracto: correspondencia, capacidad de inferencia, identificación de premisas y de supuestos, elaboración de hipótesis, diseño de su comprobación. Es más, la disponibilidad del material para los arreglos geométricos (piedrecitas, fichas, semillas, monedas, etc.) hace accesible a cualquier aula los ejercicios propuestos. La adaptación y guía por parte del maestro hará más provechoso y placentero el aprendizaje de los cuatro puntos mencionados por parte del alumno.

No se espera que el alumno (ni siquiera el de sexto año) llegue a todas las respuestas de los ejercicios propuestos. Mucho menos que el maestro *le diga la respuesta correcta*. Uno de los defectos del sistema educativo (no sólo el mexicano) es *impedir que el sujeto tantee, experimente, cometa errores y busque cómo superarlos*. La prioridad dada al programa, eventualmente, impide el disfrute del aprendizaje y el desarrollo de la autoestima. Precisamente por ello, por no formar parte del curriculum, pensamos que este tema, *los números figurados*, será provechoso. El maestro sólo necesita un conocimiento elemental de álgebra y de sucesiones para entender cómo este instrumento permitió calcular el volumen de la pirámide, del cono y de la esfera.

2 Antecedentes históricos

Una de las primeras actividades del ser humano fue contar. Hay huellas de esa actividad que se remontan a 20,000 años a.n.e., p.ej. el famoso hueso Ishango (Zaslavsky, 1992) donde hay 29 marcas en las siguientes secuencias: 3 y 6 (un duplo); 4, 8 y 10 (pares); 11, 13, 17 y 19 (¡cuatro números primos!); 11, 21, 19 y 9 (¿un calendario lunar?). La historia abunda en muestras de la importancia y utilidad del contar, por ejemplo, las tabletas de arcilla con registros de tributos e impuestos (Mesopotamia, 4000 a.n.e); los calendarios lunares y solares en diversas construcciones (Stonehenge, 3100 a.n.e.; pirámides de Gizah, 2000 a.n.e.; Hovenweep de los indios pueblo, 1000 a.n.e.; Chichén Itzá 300 e.c.). Los calendarios dependen del conteo y de la detección de secuencias (p.ej. para predecir eclipses); de igual forma, el conteo es indispensable para las transacciones comerciales, la edificación de monumentos y pirámides, para la administración de granos y rebaños, etcétera.

Incluso en los anteriores grupos nómadas la habilidad de contar debió ser muy útil; sólo contando se podía saber cómo *dividirse para un ataque, cómo repartir la presa, cómo aprovecharla por el mayor tiempo, etc.

Las secuencias de números, como las del hueso Ishango, fueron útiles para los agricultores hace unos 10000 a.n.e. Sólo conociendo la suma de una secuencia puede responder a la pregunta ¿Cuánto grano debemos sembrar en la primavera para obtener un suministro adecuado de comida para el siguiente año y con suficiente grano sobrante para sembrarlo nuevamente para el otro año?

Supongamos que 1/3 de barril en primavera producirá 1 barril en otoño. Consideremos que un barril alimenta a nuestra familia durante el invierno; el problema es que no tendremos nada de grano para sembrar la siguiente primavera. Para producir ese 1/3 adicional necesitamos 1/9 de barril (ya que se triplicará). Pero, ojo, al final del siguiente año ya no habrá excedente de grano, a menos que apartemos 1/3(1/9), esto es 1/27 de barril. La solución correcta es la serie geométrica infinita:

$$1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + \ldots$$

Más adelante veremos cómo los números figurados permitieron hallar esa suma y la de otras secuencias numéricas.

Hubo un periodo histórico en que la aritmética se apoyaba de instrumentos materiales que se hallaban, literalmente, a nivel de tierra. Es el caso de los *números figurados,* para los cuales se usaban piedrecitas para lograr figuras geométricas regulares. En griego la palabra *cálculo significa exactamente eso: piedrecita; significado con que aparece aún en medicina (cálculos biliares, renales, hepáticos).

Por otro lado, una facultad que cotidianamente se ha asociado con la inteligencia es la vista. Así decimos que "vemos un resultado", que un "planteamiento es oscuro", que "el desarrollo es difuso" o que "un razonamiento es brillante". Sin embargo, el alejamiento de las sensaciones, por ejemplo, de la visión, se ha considerado superior o de mayor abstracción. Tal es el caso de la aritmética; Platón y Aristóteles afirmaban, en efecto, que la aritmética es una ciencia superior a la geometría debido a que no se refiere a objetos concretos y visualizables como los de ésta (Bromberg, 1991). La idea de que lo material, lo concreto, es de menor jerarquía conceptual que lo general y abstracto ha llegado hasta nuestros días, lo cual se manifiesta en los mismos métodos de enseñanza que consideran más importantes los principios abstractos y generales que los casos particulares, concretos y… visualizables. Cierto, los números son ideas y las ideas no pueden verse, se piensan; pero estas ideas fueron abstraidas de experiencias y casos particulares, de manipulaciones y arreglos sensoriales.

3 Breves observaciones acerca del lenguaje y la comprensión

Es interesante anotar que las reflexiones acerca de los fundamentos de la geometría se dieron alrededor del s.V a.n.e. y la sistematización en términos de axiomas, hipótesis y corolarios fue lograda por Euclides en el s.IV. Por el contrario, los números y la aritmética se consideraron "tan naturales y obvios" que no se vió la necesidad de reflexionar sobre ellos sino hasta el s.XIX con Giuseppe di Peano. De hecho, muchos conceptos aritméticos: *par, impar o *non, divisible, residuo, etc. pueden, sin metáforas, *verse* usando piedrecitas. De ninguna manera afirmamos que *todos* los conceptos aritméticos *puedan verse*. Pero en los orígenes de la aritmética estos instrumentos (piedrecitas) y procedimientos (de los que trata este capítulo) llevaron a conceptos como los mencionados y otros más generales y abstractos.

Todo sistema de signos resulta de convenciones elaboradas durante siglos, si no es que milenios. En el caso de los símbolos matemáticos se tiene la gran ventaja de que sus convenciones gráficas son usadas hoy en todo el planeta. En cualquier lugar del mundo se entiende "3 + 2 = 5". Sin embargo, las palabras, los sonidos con los que se lee esa igualdad ¡son muy distintos! Esta vinculación directa entre el símbolo y el concepto (sin mediación de las palabras) es una de las características más notables de las matemáticas, quizás sólo compartida con la música. Es por ello que el matemático Leibniz afirmó que la música es un oculto ejercicio matemático del alma, y que intentara, sin éxito, una escritura lógica que sirviera para representar las argumentaciones sin necesidad de las palabras.

Si en un primera etapa la escritura se basó en pictogramas, esto es, en dibujos estilizados donde había una correspondencia física, los principios de economía y simplicidad llevaron a un lenguaje escrito más poderoso y, cierto, cada vez más basado en convenciones. El siguiente ejemplos de la escritura algebraica lo ilustra.

El álgebra simbólica, desarrollada hacia 1630, reemplaza las abreviaturas (síncopas) usadas para, a su vez, simplificar la escritura algebraica. Hacia el 200 de nuestra era los problemas algebraicos eran escritos textualmente, con palabras, razón por la que se le conoce como álgebra retórica (Resnikoff, 1984). En ésta se usaban las palabras “res quadrata” para indicar el cuadrado de la incógnita; el álgebra sincopada prefirió “aq”, donde “q” era la abreviatura de “quadratum”. Con estas convenciones podría escribirse “aqqq” para indicar la incógnita elevada a la octava potencia (en terminología actual). El gran avance del álgebra simbólica estuvo en aprovechar la notación posicional. Lo cual permitió reescribir “ aqqq = a^8 “. Difícilmente se puede menospreciar este logro, pues llevó a las leyes de los exponentes y, posteriormente, al concepto de logaritmo.

Lo dicho apunta a la importancia de los símbolos en el desarrollo del pensamiento y cómo éstos, en su etapa más evolucionada, dependen de convenciones y automatismos. Tal importancia ha sido captada por diferentes científicos y pensadores a lo largo de la historia; Lavoisier, por ejemplo, comienza su revolucionario Tratado elemental de química con una cita del abate Condillac: "Sólo pensamos por medio de las palabras. Los lenguajes son verdaderos instrumentos analíticos". Y añadimos: los lenguajes incluyen también a los diagramas, gráficas, *figuras, etc.

El lenguaje, afirma Vygotsky (1995), resulta de la internalización de operaciones sensoriales. La inteligencia, como quiera que se la defina, evoluciona por la interacción con diferentes grupos mediante distintas acciones, muchas de éstas corporales. En el tema que nos ocupa, los números figurados, la comunicación con los pares y con el maestro está apoyada con figuras sencillas, fácilmente modificables por un rearreglo de las fichas. Las únicas habilidades requeridas son conteo y un mínimo de desempeño manual.

Entre las diferentes formas de comprensión, la que se practica en las matemáticas es señalada especialmente como la “verdadera” comprensión. Si bien el uso de cualquier lenguaje, sea artístico, musical o poético, ofrece sin duda algún tipo de comprensión, suele afirmarse que sólo el uso de un lenguaje preciso y lógicamente consecuente, un lenguaje que pueda formalizarse a tal grado que haga posible las pruebas rigurosas, puede conducir a la verdadera comprensión.

El resultado, en la enseñanza de las matemáticas es que se insiste más en los enunciados generales y en los algoritmos que en el descubrimiento sensorial de regularidades. Sin embargo, difícilmente puede comprenderse un enunciado general cuando no hay ninguna experiencia de los particulares implicados en ese enunciado.

De lo anterior se sigue la importancia de considerar el nivel de desarrollo de los estudiantes a fin de mantener los nuevos conceptos dentro de la “zona de desarrollo próximo”. Es en ésta donde el papel del maestro tiene particular incidencia al ser éste facilitador de estructuras mentales más complejas mediante la interacción con los pares a través del lenguaje. Si, como afirma Vygotsky, la verbalización lleva a reorganizar las ideas (y por tanto facilita el desarrollo) también es cierto que las operaciones del sujeto sobre objetos materiales permiten el desarrollo de estructuras y conceptos como los de: invariante, transformación, compensación, reversibilidad.

A partir de los números figurados el alumno podrá desarrollar las operaciones formales de: inferencia, predicción, implicación e identificación de supuestos. En una primera etapa, cierto, requerirá de fichas y de objetos concretos. Sólo más adelante podrá usar el pensamiento simbólico con el sistema de numeración decimal, pero tendrá que pasar antes por una rica zona de experiencias sensoriales.

Una concepción común, pero falsa, es que el procesamiento sensorial tiene lugar en alguna zona del cerebro. La investigación neurológica apunta a que el sentido de integración se crea por la acción concertada de diversos sistemas neurales en regiones separadas del cerebro (Damasio, 2001). Esa integración implica percepción, memoria y razonamiento. La manipulación, es en las primeras etapas de desarrollo, una actividad que propicia, justamente, esa integración de diversos sistemas: muscular, perceptual y simbólico.

Como afirma Vygostky (1995): Todo proceso, toda función, aparece dos veces en el desarrollo del niño. Primero en el nivel social, luego en el individual debido a la interiorización. En otras palabras: la inteligencia implica la interiorización de esquemas sensorio motores. Por ello la importancia de las operaciones musculares y sensoriales en la construcción de conceptos abstractos como número, divisibilidad, secuencia, etc.

Las familias (o tipos) de números figurados llevan a la designación de arreglos geométricos con un nombre común. De la noción de clase, por una operación mental, el sujeto puede seleccionar algunos conjuntos del resto e identificar los rasgos esenciales del grupo (categorización). La otra operación mental, la clasificación, sólo agrupa los elementos de acuerdo a categorías implícitas. Por ejemplo: los números triangulares 1, 3, 6, 10, no se agrupan como tales por el número de fichas (pues es distinto en cada caso), sino por formar figuras con tres lados iguales (criterio o categoría).

La investigación educativa coincide, desde muy diversas visiones, en las siguientes conclusiones:

1. El aprendizaje se construye a partir de lo que ya sabe el sujeto.
2. Aprender supone establecer relaciones, estructurar conocimientos.
3. El razonamiento está asociado a campos particulares de conocimientos, a contextos determinados.
4. Los afectos y el estado de ánimo del sujeto influyen en su aprendizaje.
5. El aprendizaje es una construcción activa de significados. La realidad se interpreta a partir de las estructuras conceptuales del sujeto quien las somete a comprobaciones sensoriales y a hipótesis.

El punto 5 implica que, para ciertos casos, el sujeto requiere nuevas construcciones totalmente novedosas, esto es, la situación obliga a una reestructuración profunda. Más adelante veremos que eso requiere la construcción de los números pentagonales.

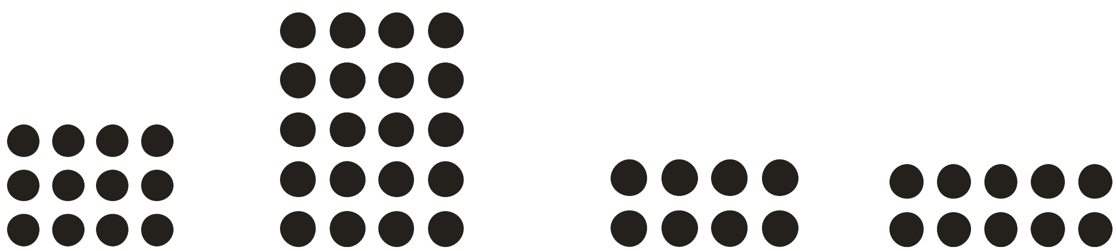
Como mostramos en el cuerpo del artículo, los ejercicios propuestos pueden tener muy diverso grado de dificultad y abstracción. Gracias a que no forman parte del curriculum el alumno no estará presionado por las evaluaciones y captará mejor el aspecto lúdico del aprendizaje. Se espera, con lo mismo, que el maestro y el alumno se aparten del mito de que "sólo vale lo evaluable".

4 Multiplicación = suma abreviada

Los antiguos griegos estaban interesados en los números usados para contar, pero no sólo por sus aplicaciones prácticas. No usaban los números negativos y consideraban a las fracciones como relaciones entre números naturales. La primera característica que descubrieron fue la clasificación de los números en pares e impares. Una antigua práctica de los griegos era usar piedrecitas para representar números. Lo que llevó a agruparlas de manera simétrica; como veremos en la sección 7, las piedrecitas pueden acomodarse como triángulos, *cuadrados, rectángulos, etc.

Los números oblongos son arreglos rectangulares donde un lado excede al otro en una ficha (sección 13). Permiten ver, literalmente, una multiplicación como una suma abreviada. Consideremos los siguientes ejemplos: 2+2+2+2=8, que es lo mismo que multiplicar 2x4, o bien, 4x2. Esta última expresión es, también el resultado de sumar 4 dos veces, esto es, 4+4. Así como el orden en que se efectúa una suma no influye en el resultado, tampoco el orden en que se efectúa la multiplicación. Los siguientes son algunos ejemplos de números oblongos 4x3, 5x4, 8x9. Pero no lo son 4x4, 5x7 pues no cumplen con la condición de que un lado exceda al otro en una unidad.

Un número oblongo se define como un número rectangular donde un lado excede en una ficha al otro. Nótese que la posición del arreglo es irrelevante. Ejemplos de números oblongos y no oblongos:



Oblongo: 4-3=1 Oblongo: 5-4=1 No oblongo: 4-2=2 No oblongo: 5-2=3

Los números rectangulares permiten *ver* la multiplicación como una suma abreviada. Nótese que todo oblongo es rectangular pero no todo rectangular es oblongo. En el primer ejemplo del cuadro anterior 3x4 =12 es el total de fichas de la figura. Los primeros oblongos son 2, 6, 12, 20, 30. Esta serie de números es la suma sucesiva de las series de números pares o bien el producto de dos números consecutivos: 2 = 1 x 2; 6 = 2 x 3 = 2 + 4; 12 = 3 x 4 = 2 + 4 + 6; 20 = 4 x 5 = 2 + 4 + 6 + 8.

Un oblongo también puede obtenerse duplicando un número triangular.

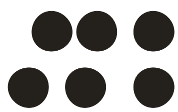
4.1 Ejercicios:

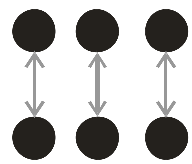
1. Muestra que la suma de los 2 primeros números pares es un número oblongo.
2. Muestra que la suma de los 3 primeros números pares es un número oblongo.
3. Muestra que la suma de los 4 primeros pares es un número oblongo.
4. Muestra el doble de cualquier número triangular es un oblongo.

El maestro pedirá a los alumnos distintos arreglos de números oblongos (sin definir el número de fichas por emplear) para garantizar que está comprendido el concepto de número oblongo. A continuación relacionará el total de fichas con cada arreglo con las dimensiones del arreglo por dos vías: conteo directo y multiplicación de base por altura (área del rectángulo).

5 Pares y nones

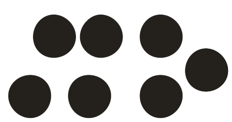
Un grupo de piedrecitas es divisible entre dos si pueden formarse dos montoncitos donde cada una corresponde a otra, y sólo a otra *sin que sobre ninguna piedrecita.*

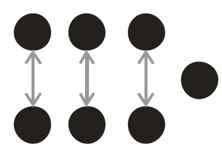




Los números divisibles entre dos son conocidos como *pares*.

Un número impar forma dos grupos de piedrecitas donde uno excede siempre al otro en una piedrecita. El grupo de la izquierda no es divisible entre dos. Como se ve en el dibujo de la derecha *sobra una piedrecita*.





Los números que no son divisibles entre dos son conocidos como *impares* o como números *nones*.

El maestro propondrá al alumno dividir grupos de fichas en dos grupos iguales. Los alumnos descubrirán que sólo hay dos posibilidades: par o non, esto es, el grupo original de fichas no admite otra clasificación: o divisible entre dos, o divisible entre dos con residuo 1. Nunca se podrá tener otro número como residuo. Por ejemplo, si toma un grupo de 10 monedas, el alumno obtendrá dos subgrupos de 5 monedas cada uno. Si el alumno toma un grupo de 13 monedas, podrá formar dos grupos de 6 monedas y le sobrará 1. Con 14 fichas no sobrarán dos fichas, pues cada una puede acomodarse en un grupo.

5.1 Ejercicios para el alumno con pares e impares:

1. Muestra que la suma de cualquier número de números pares es siempre número par.
2. Muestra que la suma de un número impar de números impares es un número impar.
3. Muestra que la suma de un número par de números impares es un número par.
4. Al cuadrado de un número impar se le resta una unidad, muestra que el resultado es divisible entre 4.
5. Muestra que todo número oblongo es par.
6. Muestra que los números oblongos resultan de la suma de sus pares anteriores.

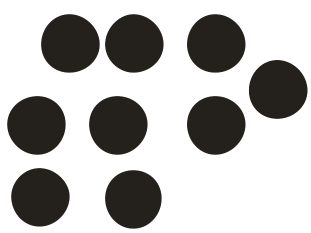
6 División = resta abreviada

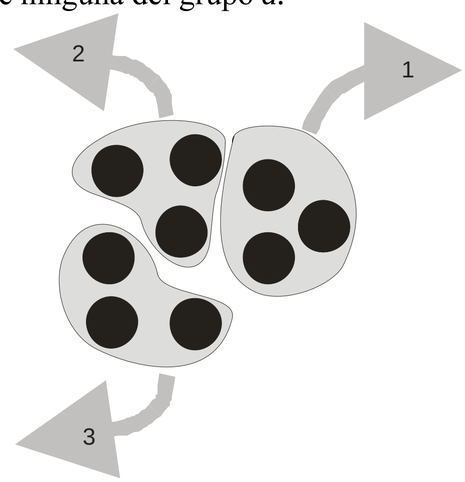
En la sección 4 vimos cómo agregar sucesivamente el mismo número de fichas se resume en la operación conocida como *multiplicación*. Ahora veremos cómo eliminar de un grupo, sucesivamente, el mismo número de fichas se traduce en una *división.*

*6.1 Dividendo, divisor. *Cociente, residuo.*

En lo que sigue usaremos dos nociones fundamentales: correspondencia y orden. Sobra decir que no son exclusivas de las matemáticas, aparecen en todas las ciencias y en actividades tan diferentes como las artes, la religión, la política, la economía, etcétera. La noción de correspondencia está en la misma noción de significado, p.ej. un símbolo *corresponde* a un objeto, o a un concepto. En el caso ideal, a cada símbolo corresponderá un concepto y, a la vez, a cada concepto corresponderá un símbolo. Algo así como el CURP, la clave única del registro de población; a cada ciudadano corresponde una clave, y esa clave la tiene sólo un ciudadano. En el ejemplo anterior, las flechas grises muestran la *correspondencia entre cada una de las piedrecitas de un grupo con las del otro.*

Un número *a* es divisible entre otro *b* si pueden eliminarse sucesivamente *b* piedrecitas sucesivamente, de forma que al final no quede ninguna del grupo *a.*





El número de la izquierda es divisible entre tres. El *cociente es tres, porque tres es el número de veces que se repite la eliminación.

El maestro propondrá diferentes grupos de fichas y cantidades de fichas por retirar. También puede proponer el añadido de grupos de fichas para llegar al grupo mayor. ¿Faltan, sobran? ¿Por qué?

La siguiente tabla muestra dos cifras en negrita, la primera es el cociente y la segunda es el residuo. El dividendo es el número original de piedrecitas, el divisor es el número de piedrecitas que, sucesivamente se va retirando del grupo llamado *dividendo.* El número de veces que se puede repetir la operación se llama *cociente*.

Ejemplos: 7/3 significa que a un grupo de 7 fichas se le retirarán grupos de 3 fichas.

Esta operación sólo la podemos hacer 2 veces y sobrará una ficha. Luego, el cociente es 2, y el residuo es 1. 6/4 significa que a un grupo de 6 fichas se le retirarán grupos de 4 fichas. Esta operación sólo se puede hacer 1 vez y sobrarán 2 fichas. El cociente es 1 y el residuo es 2.

Divisor→	1	2	3	4	5	6	7	8
Dividendo↓								
1	**1 | 0**							
2	**2 | 0**	**1 | 0**						
3	**3 | 0**	**1 | 1**	**1 | 0**					
4	**4 | 0**	**2 | 0**	**1 | 1**	**1 | 0**				
5	**5 | 0**	**2 | 1**	**1 | 2**	**1 | 1**	**1 | 0**			
6	**6 | 0**	**3 | 0**	**2 | 0**	**1 | 2**	**1 | 1**	**1 | 0**		
7	**7 | 0**	**3 | 1**	**2 | 1**	**1 | 3**	**1 | 2**	**1 | 1**	**1 | 0**	
8	**8 | 0**	**4 | 0**	**3 | 2**	**2 | 0**	**1 | 3**	**1 | 2**	**1 | 1**	**1 | 0**

6.2 Ejercicios para el alumno

1. ¿Es divisible 9 entre dos? ¿Cuántas piedrecitas sobran? ¿Cuál es el cociente?
2. Ponga un ejemplo de división que lleva a residuo 2.
3. Ponga un ejemplo de división que lleva a residuo 3.
4. Ponga un ejemplo de división que lleva a residuo 4.
5. Ponga un ejemplo de división que lleva a residuo 5.
6. Divida 11 entre 2. Luego entre 3. Luego entre 4. Luego entre 5. ¿Hay algún divisor que lleve a residuo 0?
7. Repita el ejercicio 6 con los números 7 y 5. ¿Hay algún divisor que lleve a residuo 0?
8. Determina en qué casos los números oblongos son divisibles entre cuatro y cuándo entre ocho.

6.3 Los números primos

Si se intenta dividir un grupo formado por 3, 5, 7, 11, 13, 17 fichas se encontrará ¡que es imposible! Los números que sólo pueden ser divididos entre 1 y entre sí mismos se les conoce como primos. Aunque la noción de número primo es fácil de comprender no existen procedimientos sencillos para generarlos.

El maestro propondrá un grupo de 5 piedrecitas a fin de retirar piedrecitas en grupos de 2, de 3 y de 4, Los alumnos hallarán que siempre queda un residuo, esto es, que siempre sobra alguna o algunas. Lo mismo ocurrirá con 7, 11, 13, 17. Descubrirán que hay números divisibles sólo entre sí mismos o entre la unidad.

El 2 es el primer número primo aunque en rigor, el número 1 también satisface la definición anterior. Lo excluimos por una razón que presentaremos más adelante. El 2 es un número muy especial pues es el único número primo que es, a la vez, par.

Los números que no son primos son conocidos como *compuestos*, p.ej. 10, 15, 18 pues siempre pueden descomponerse en factores que, en última instancia, son primos. Por ejemplo, 18 tiene a 2 y 9 como factores, pero el 9, a su vez, tiene a 3 como factor (dos veces); esto es: 18 = 2x3x3. Todo número compuesto puede escribirse como producto de números primos.

Fermat conjeturó que $p_n = 2^{2^n} + 1$ es primo para todos los enteros no negativos *n*. Para *n* = 0,1, 2, 3, 4 tenemos los valores respectivos p_n = 3, 5, 17, 257, 65537 primos todos. Un siglo más tarde Euler mostró que p_5 = 4,294,967,297 tiene a 641 como factor y, por tanto, no es número primo. No deja de sorprender el que algunas personas desarrollen capacidades aritméticas extraordinarias. Un ejemplo muy documentado es el de Zerah Colburn. A Colburn se le preguntó, cuando era un niño, si el número 4,294,967,297 es primo; después de unos minutos respondió que no pues tenía como divisor a 641. Colburn fue incapaz de explicar el procedimiento por el cual llegó a la respuesta.

La conjetura de que cualquier par puede expresarse por la suma de dos números primos fue propuesta por el matemático ruso Cristian Goldbach en 1742. Aún no se ha demostrado. Pero todos los casos particulares probados la cumplen.

El teorema fundamental de la aritmética afirma: todo número natural mayor que 1 puede expresarse como el producto de números primos en sólo una forma. En otras palabras, si un número puede descomponerse en sus factores primos sólo hay una forma de hacerlo. A continuación unos ejemplos: 6 tiene como factores a 2 y 3 (números primos). Conviene anotar que, precisamente para mantener ese teorema, los matemáticos han convenido en no considerar al 1 como número primo; el 6 podría expresarse como 1x2x3 o como 1x1x1x2x3, etcétera.

Como mencionamos, el único primo par es el 2, y es fácil notar que todos los demás deben ser impares pues, de otra forma, serían divisibles entre dos.

Hace más de 2000 años Euclides mostró que hay infinita cantidad de números primos con el método de reducción al absurdo. Éste método consiste en afirmar lo contrario de lo que se quiere afirmar para llegar a una contradicción obvia. Puesto que hay una contradicción el enunciado original debe ser falso. He aquí la argumentación de Euclides:

> Si existe una cantidad finita de primos uno de éstos deberá ser el más grande. Lo llamaremos P.
> Si multiplicamos los primos anteriores a P deberemos tener una cantidad M divisible entre cada uno de sus factores. P.ej. 2x3x5 es una cantidad divisible entre 2, entre 3 y entre 5. Pero si a M le añadimos 1 ya no será divisible entre ninguno de estos divisores. Así 2x3x5+1 es un número que no se puede dividir entre sus divisores.
> Si P es el número más grande que existe podemos multiplicar por todos los primos anterior y por el mismo P para obtener un número mayor que P. Así 2x3x5x7x...xP es mayor que P y es divisible por cada uno de sus factores.
> Si sumamos 1 al producto anterior tendremos un número que no es divisible entre 2, ni entre 3, ni entre 5, ni entre P. Lo que significa que es un número primos mayor que P. Como P había sido propuesto como el mayor número primo ¡se llega a una contradicción!

La siguiente tabla, donde se muestran en negrita los números primos, llevará a interesante observaciones:

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

Los primeros dos renglones tienen 4 números primos, pero el último sólo tiene uno. ¿Continúan alejándose entre sí los números primos a medida que son mayores? ¿Hay alguna regularidad en ese espaciamiento? Nótese que entre el 89 y el 97 hay 7 números no primos, entre el 2 y 3 no hay ninguno: entre el 11 y el 13 hay uno. ¿No hay alguna forma de predecir si un número será primo?

Esas preguntas son inquietantes porque hay formas simples para obtener un número par, basta comenzar con 2 y saltar un número para llegar al siguiente que es par. Para obtener números divisibles entre 5 basta comenzar con 5 y brincar 4 números para llegar al 10 y así sucesivamente.

A pesar de que los números primos son los bloques fundamentales con los que se construyen (recuérdense el teorema fundamental de la aritmética y la conjetura de Goldbach) tienen una extraña impredictibilidad. No se ha podido hallar la regularidad con que se presentan los números primos.

Anteriormente dijimos que todo número compuesto puede expresarse como un producto de números primos. Los antiguos griegos notaron que algunos números tienen divisores cuya suma es igual al número original. Por ejemplo, 6 tiene como divisiores a 1, 2 y 3, cuya suma 1+2+3 es igual a 6. Otro ejemplo, 28 tiene como divisores a 14, 7, 4, 2 y 1, cuya suma 14+7+4+2+1 = 28. A esta clase de números los llamaron *números perfectos*. Como todo lo perfecto, los números perfectos no abundan, los siguiente números perfectos son 496, 8128, 33,55,336 y 8,589,869,056. El noveno número perfecto tiene 37 cifras y, al parecer, todos son pares.

Concluyamos este apartado de los números perfectos con una curiosa propiedad:

$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/6 = 2$$
$$1/1 + 1/2 + 1/4 + 1/7 + 1/14 + 1/28 = 2$$

En otros términos la suma de los recíprocos de los divisores más el recíproco del número perfecto, siempre suma 2.

7 Los números figurados

Los filósofos pitagóricos de los siglos VI y V a.n.e. usaron piedrecitas acomodadas en formas regulares para descubrir y probar visualmente ciertas propiedades numéricas; de éstas hablaremos más adelante.

Un libro de Nicomaco de Gerasa (*ca.* 100 e.c.) presenta algunos de los descubrimientos pitagóricos de los números poligonales o *números figurados* (Heath, 1981). Estos números fueron abundantemente expuesto en los libros de aritmética europeos del s.XV y, al parecer, ya eran conocidos por los antiguos chinos.

Para los pitagóricos (500 a.e.c.) estos números fueron de gran importancia pues, sostenían que todo podía ser explicado con números los cuales tienen características específicas y formas, así los fenómenos de la naturaleza y de la música están gobernados por relaciones entre números enteros.

Atributos de los números según los pitagóricos

Limitado	Ilimitado
Impar	Par
Unidad	Pluralidad
Derecha	Izquierda
Masculino	Femenino
Reposo	Movmiento
Recto	Curvo
Luz	Oscuridad
Bueno	Malo
Cuadrado	Oblongo

Supusieron que la verdad fundamental de lo *ilimitado* se mezcló con la *unidad* y separó a los números; éstos se convirtieron en los elementos básicos de construcción del Universo. Apoyados en estas ideas buscaron más atributos tanto a lo ilimitado como a lo limitado para aplicarlos a sus vidas personales.

Tales creencias han permanecido en diferentes culturas y tiempos. No sorprende que, por ejemplo, el número 7 aparezca en los rituales descritos en el Antiguo Testamento, p.ej. Josué 6,4 “Siete sacerdotes irán delante del Arca tocando las siete trompetas...” y Levítico 4,6 “... y habiendo mojado el dedo en la sangre rociará con ella siete veces hacia el velo del santuario”. Según la tradición hebrea (Génesis) Dios necesitó seis días para la creación y descansó el séptimo.

Para los antiguos había 7 cuerpos celestes: Saturno, Júpiter, Marte, Venus, Mercurio, Sol y Luna. Lo que explica que haya 7 días en la semana. También eran conocidos 7 metales: oro, plata, estaño, cobre, mercurio, plomo, hierro.

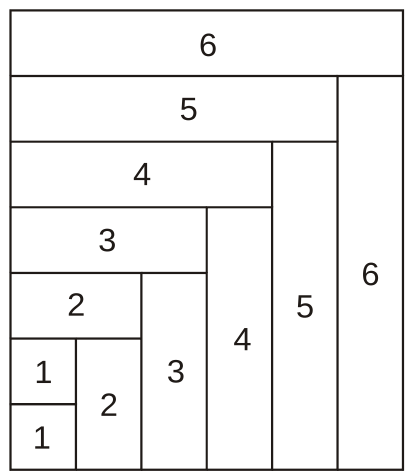
El siete representa al micro y macro cosmos, expresa la relación entre Dios y el hombre (3+4). El universo fue creado en 7 días, hay 7 pecados capitales, las etapas de iniciación son múltiplos de 7, a los 7 años es la edad de la razón, los 14 es la adolescencia, los 21 la adultez. Entre los griegos el 7 estaba consagrado a Apolo, dios de la fertilidad. Entre los babilonios a Ishtar, diosa, también de la fertilidad.

8 Números lineales

Los números lineales son los números figurados más sencillos. Su arreglo geométrico es una línea:

1 2 3 4

Los antiguos griegos ya sabían que la suma de los números lineales puede obtenerse a partir del siguiente rectángulo:

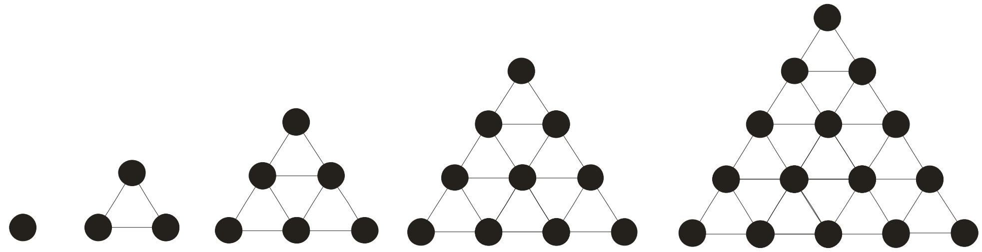


$$\begin{aligned} A &= b \times h \\ &= 6(1+6) \\ &= 2\sum_{1}^{6} n \end{aligned}$$

$$2\sum_{1}^{n} n = n(1+n) \qquad Ec.1$$

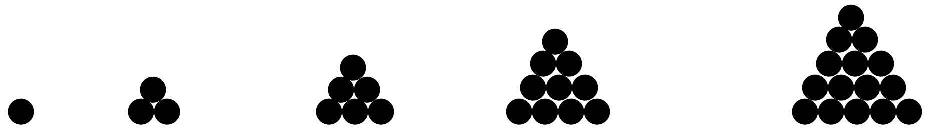
9 Números triangulares

Los números figurados más simples, los *triangulares*, forman la sucesión:



1 3 6 10 15

Al usar monedas o fichas pueden acomodarse en arreglos compactos:



Más adelante veremos que habrá necesidad de reconsiderar tal arreglo con los números pentagonales.

Nótese, por otro lado, que los números triangulares se obtienen de las secuencias:

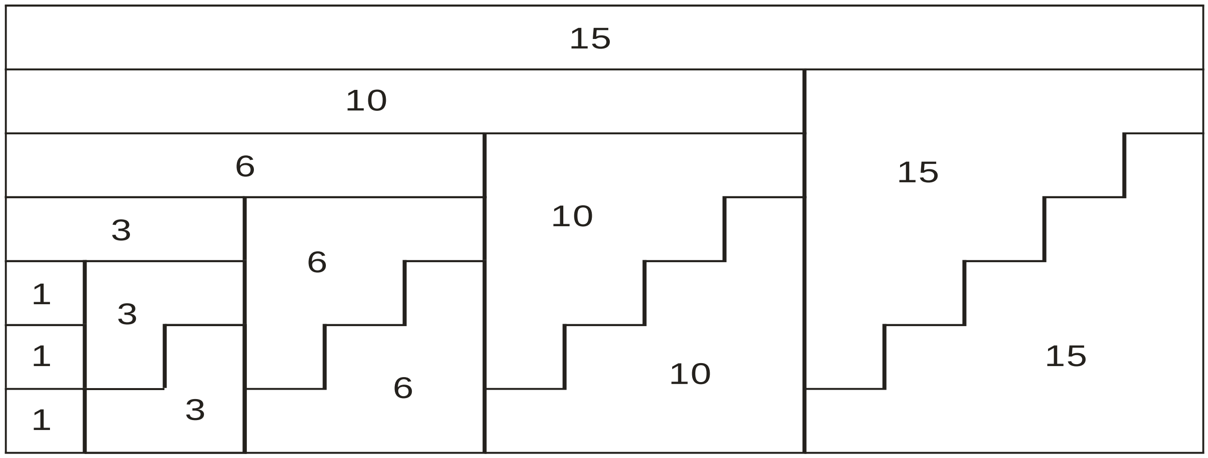
$T_1=1$
$T_2=1+2=3$
$T_3=1+2+3=6$
$T_4=1+2+3+4=10$

9.1 Ejercicios para el maestro:

1. Encuentra el número de fichas (F) necesario para armar cada uno de los 7 primeros números triangulares.
2. ¿Qué relación hay entre F para cada sucesivo número triangular?¿Hay operaciones aritméticas que permitan calcular F para el octavo número triangular, para el noveno, para el décimo...?
3. Repite para los números cuadrados.
4. Define con tus propias palabras el *gnomon.
5. Muestra que todo número oblongo es el doble de un número triangular.
6. Muestra que la suma de pares sucesivos genera un número oblongo.
7. Todo número oblongo puede dividirse en dos números triangulares iguales.
8. Si al cuadrado de un número impar se resta una unidad, el resultado se puede dividir entre cuatro. Si éstos son números oblongos, el resultado de la resta es divisible entre 8.
9. La suma de los primeros *n* impares es el *n*-ésimo cuadrado.
10. ¿Puede obtenerse un número triangular con la suma de los n primeros enteros?

Las especulaciones sobre los números y las proporciones los condujeron a la intuición de la *armonía del *cosmos; no sorprende que sostuvieran que la distancia entre los cuerpos celestes correspondan a intervalos musicales y que los números fueran una especie de materia cósmica a manera de "átomos" esenciales de la naturaleza.

Un arreglo geométrico con números triangulares permite hallar la suma de la sucesión.

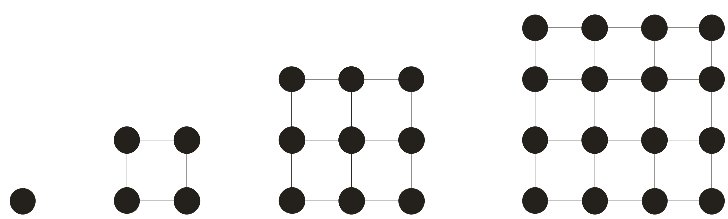


En este caso el área del rectángulo es igual al triple de la suma de los primeros 5 números triangulares.

$$
\begin{aligned}
A &= (1+2+3+4+5)(5+2) \\
&= (5+2)\times\sum_{1}^{5} n_L \\
&= (n+2)\times\sum_{1}^{5} n_L \\
&= 3\times\sum_{1}^{5} n_T \qquad\qquad Ec.2
\end{aligned}
$$

10 Números cuadrados

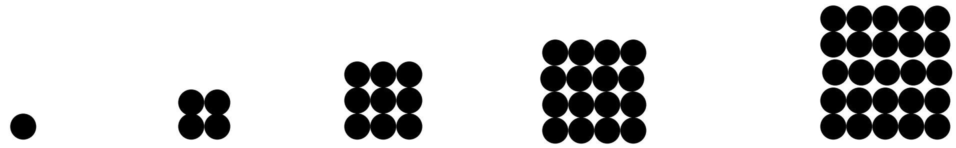
En forma semejante se pueden formar números cuadrados:



1 4 9 16

Sin embargo, la formación de los números pentagonales obliga a romper la característica de arreglo compacto; seguir sólo la intuición estética a su nivel sensorial, llevará a las inconsistencias que mostraremos en el siguiente apartado. Esto es, el juicio estético depende, obvio, de una experiencia sensorial pero también de la reflexión sobre la complejidad de la experiencia y la posibilidad de establecer estructuras de mayor inclusividad.

A semejanza de los números triangulares, los números cuadrados también pueden representarse de una forma compacta:



1 4 9 16 25

Los números cuadrados cumplen con la secuencia

$C_1=1$
$C_2=2X2=1+3=4$
$C_3=3x3=1+3+5=9$
$C_4=4X4=1+3+5+7=16$
$C_5=5X5=1+3+5+7+9=25$

Los pitagóricos notaron que la suma de sucesivos nones genera un cuadrado a partir del gnomon. Esto es, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $5^2=1+3+5+7+9$. Es muy probable que Pitágoras haya descubierto que a cualquier cuadrado de impar puede añadirse a algún cuadrado par para producir ¡otro cuadrado! Esto es: $3^2+4^2=5^2$ o bien $5^2+12^2=13^2$. Nótese que en el primer caso $3^2=4+5$ y, en el segundo: $5^2=12+13$.

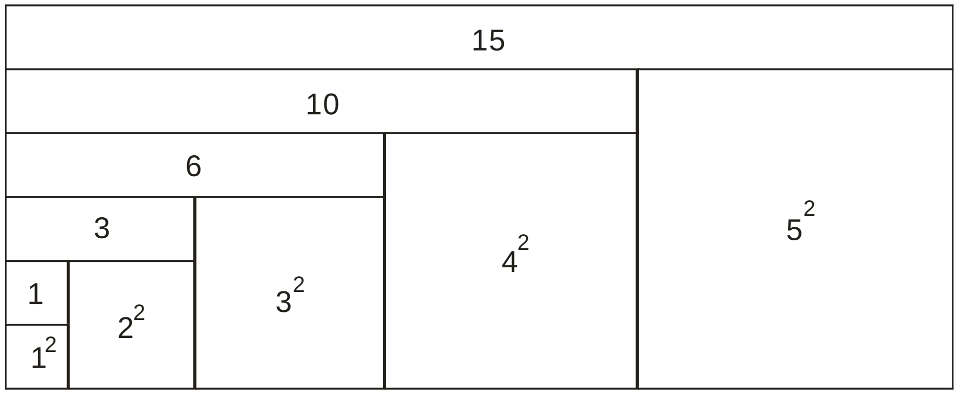
10.1 Ejercicios para el maestro:

Los siguientes ejercicios implican números triangulares y cuadrados:

1. Teorema de Plutarco: Tome cualquier número triangular, multiplíquelo por 8, súmele 1. El resultado es un número cuadrado.
2. Tome cualquier número oblongo, multiplíquelo por cuatro y súmele 1. El resultado es un número cuadrado.

1. Muestra que la suma de números triangulares sucesivos es un número cuadrado.
2. Muestra que la suma de los 2 primeros triangulares es el cuadrado de 2.
3. Muestra que la suma de los 5 primeros triangulares es el cuadrado de 5.
4. Muestra que el cuadrado de un impar, al ser dividido entre 4 siempre deja de residuo 1.
5. Muestra que el cuadrado de un par es siempre par.
6. Muestra que el cuadrado de un impar es siempre impar.
7. Muestra que la suma de los n primeros nones es igual a n^2.

Para hallar la suma de la sucesión de cuadrados, el siguiente diagrama es fundamental:



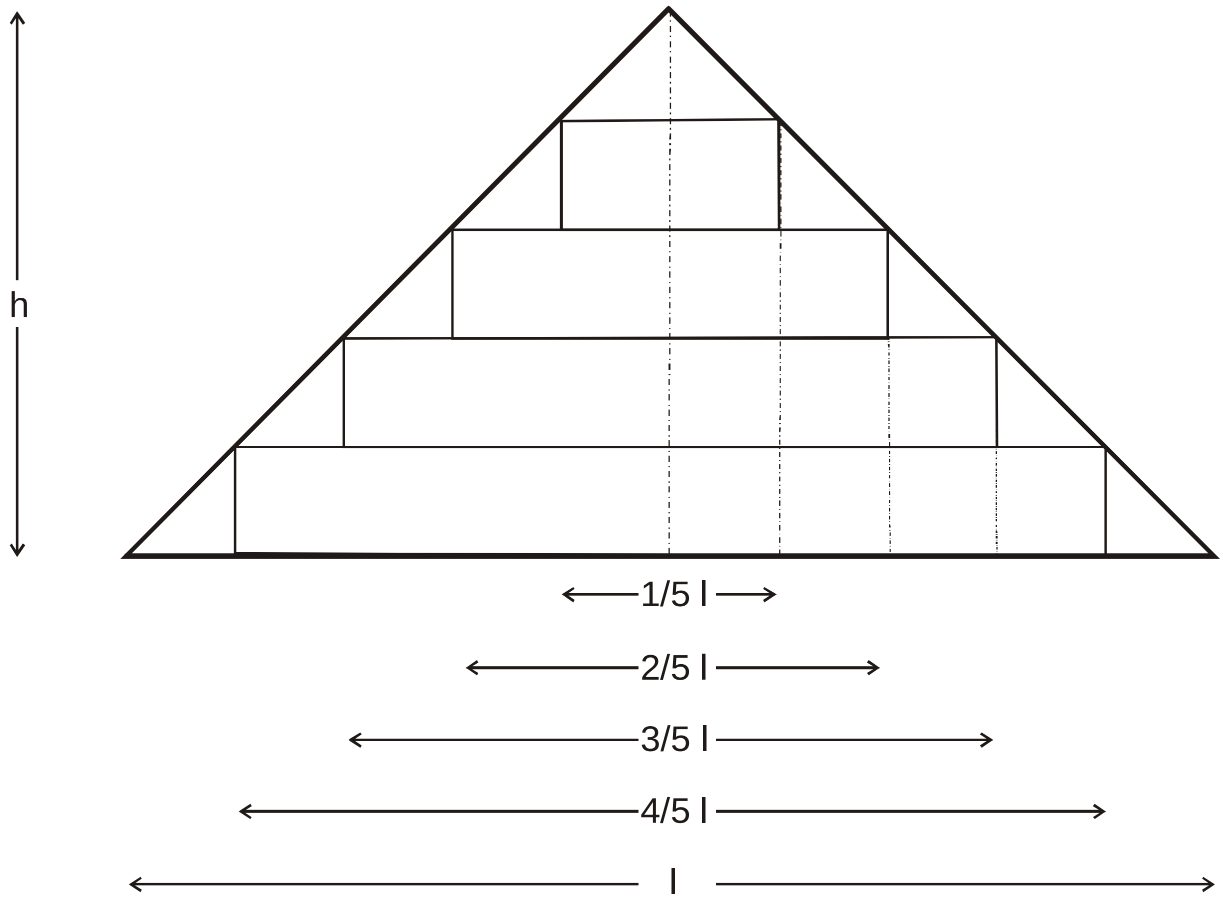
La suma de los primeros 5 números cuadrados y los 5 primeros números triangulares es igual al área del rectángulo que, por otro lado es:

$$
\begin{aligned}
A &= b \times h \\
&= (1+2+3+4+5)(5+1) \\
&= (5+1) \times \sum_{1}^{5} n_L \qquad\qquad Ec.3
\end{aligned}
$$

Nótese que ya obtuvimos la expresión que permite hallar la suma de los n primeros enteros, es decir, lineales.

$$
\begin{aligned}
\sum_{1}^{n} n_c &= (n+1)\sum_{1}^{n} n_L - \sum_{1}^{n} n_T \\
&= (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n+2)\,n\,(n+1)}{3\times 2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad\qquad Ec.4
\end{aligned}
$$

Sólo nos falta mostrar cómo aparece esta sucesión en el cálculo del volumen de una pirámide de base cuadrada.



Puesto que la altura h de la pirámide se ha dividido en 5 partes iguales, la altura de cada bloque es $h/5$. El lado de cada bloque cuadrado se obtiene de considerar que el triángulo de la derecha tiene una base dividida también en partes iguales.
El volumen de la pirámide será aproximadamente igual a la suma de los volúmenes de los cuatro bloques, esto es:

$$\begin{aligned} V_5 &= \left(\frac{4}{5}l\right)^2 \frac{1}{5}h + \left(\frac{3}{5}l\right)^2 \frac{1}{5}h + \left(\frac{2}{5}l\right)^2 \frac{1}{5}h + \left(\frac{1}{5}l\right)^2 \frac{1}{5}h \\ &= \frac{hl^2}{5}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{5}\right)^2\right] \\ &= \frac{hl^2}{5^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\right) \end{aligned}$$

Nótese que l^2 es el área de la base y que, mientras mayor sea el número de bloques, más cerca estaremos del volumen de la pirámide. En la siguiente expresión n indica el número de segmentos en que se ha dividido la altura de la pirámide

$$V_n = \frac{hl^2}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + n^2\right)$$

Podemos ahora sustituir en la ecuación del volumen de la pirámide quedando, después de algunas simplificaciones algebraicas:

$$V_n = \frac{1}{6}hl^2\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \qquad Ec.5$$

Como ya mencionamos, cuanto mayor sea el número de segmentos en que dividimos la altura de la pirámide, más cercana será la ecuación 5 al volumen de la pirámide. Y al aumentar n veremos que las dos fracciones dentro del paréntesis de la ec. 5 se acercan cada vez más a cero.
Con ello, la ec. 5 queda como:

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{3}hl^2 \\ &= \frac{1}{3}a\,l^2 \qquad Ec.6 \end{aligned}$$

Si se trata de un cono, el area de la base, a, será πr^2. Tendremos un cono cuyo volumen es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2\, l$

Los antiguos griegos determinaron la superficie de una esfera igual a $4\pi r^2$ y la visualizaron como un cono cuyo vértice apunta hacia el centro. En otras palabras, vieron a la esfera como un cono cuya base es la superficie de la esfera y cuyo vértice (del cono) coincide con el centro de la esfera. En este caso la altura del cono es r y el volumen de la esfera es:

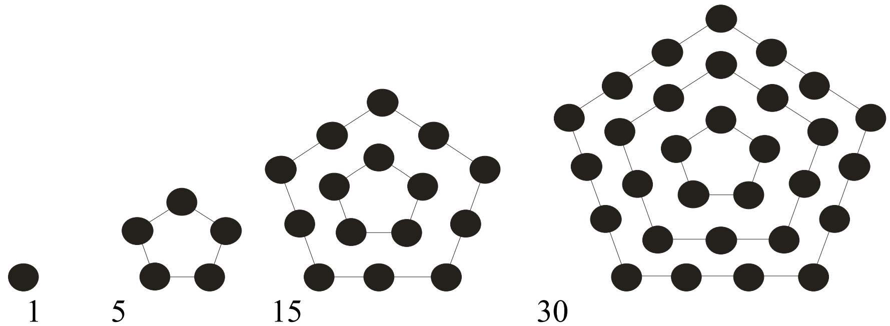
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

No está probado que los antiguos griegos hayan usado los números figurados para la determinación del volumen de la pirámide, del cono y de la esfera, como aquí lo presentamos. Pero… es muy posible.

El maestro hará las sustituciones algebraicas que llevan a la obtención del volumen de una pirámide con 4 bloques. Podrá argumentar a los alumnos que un aumento en el número de bloques hace más exacto el cálculo.

11 Números pentagonales

En este arreglo deben buscarse las regularidades geométricas más allá de las primeras impresiones. En efecto, los números lineales, triangulares y cuadrados presentan una simetría y un caracter compacto que lleva a pensar que los números pentagonales son:



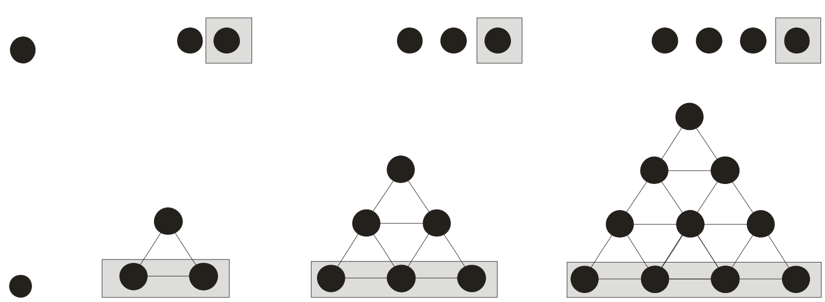
Lo que obliga a preguntarse ante estos arreglos ¿por qué sólo se obtienen múltiplos de 5? ¡En los números cuadrados no se tienen sólo múltiplos de 2! ¡En los triangulares tampoco hay sólo múltiplos de 3!

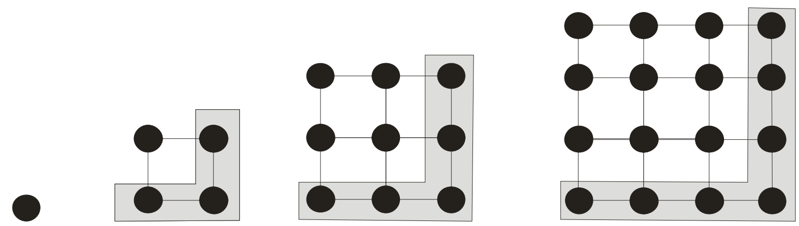
Hay, además, otras irregularidades con este diseño de números pentagonales donde cada número "envuelve" con un pentágono al anterior. ¿Por qué el segundo número pentagonal no incluye al primero, igual a 1? Si así fuera, el segundo pentagonal ¡sería 6!
Si aceptáramos esta ley de formación de números figurados concluiríamos que el segundo número triangular no es 3 ¡sino 4! Por otro lado ¿por qué obtener un pentagonal añadiendo un pentágono externo a su predecesor? En los números cuadrados, triangulares y lineales ¡no se procedió así! Es más, si se intenta acomodar monedas de acuerdo al arreglo compacto se notará que para 15 fichas es imposible hacer que se toquen las monedas del pentágono exterior.

La conclusión es que debemos pensar en una nueva forma de acomodo de las piedrecitas para la generación de los números pentagonales. Ello se logrará con el concepto de *gnomon.*

12 El gnomon

Las siguientes figuras muestran gráficamente el concepto del gnomon:

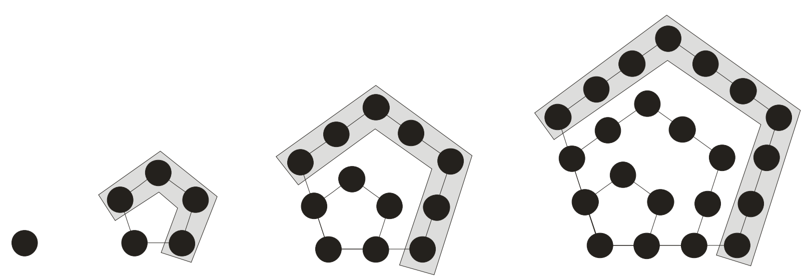




El gnomon para los segundos números figurados está formado por 1, 2, 3 fichas.
El gnomon para los terceros números figurados incluye 1, 3, 5 fichas.
El gnomon para los cuartos números figurados implica 1, 4, 7 fichas.

Por otro lado, la formación de los sucesivos números triangulares resulta del arreglo de fichas en un línea (la sombreada en gris). Para formar los sucesivos números cuadrados, las fichas están acomodadas en una escuadra (dos segmentos, sombra gris). Nótese que el gnomon para los números cuadrados es siempre non; ello permite entender por qué la suma de los n primeros nones produce n^2.

¿Será disparatado pensar que los números pentagonales implican un gnomon de tres segmentos? Las siguientes figuras fueron obtenidas con un gnomon de tres segmentos:



1 5 12 22

Podrá notarse que el gnomon está constituido por 4, 7 y 10 fichas. Para verificar esta propuesta de construcción de los números pentagonales debemos buscar regularidades más allá de las primeras percepciones. Lo lograremos considerando la diferencia entre sucesivos números figurados de la misma familia.

12.1 Primera diferencia

La diferencia entre el número de fichas empleadas para un número menos el total de fichas empleada para el anterior (de la misma familia) es *la primera diferencia*.

Ejemplo de primera diferencia con números lineales:

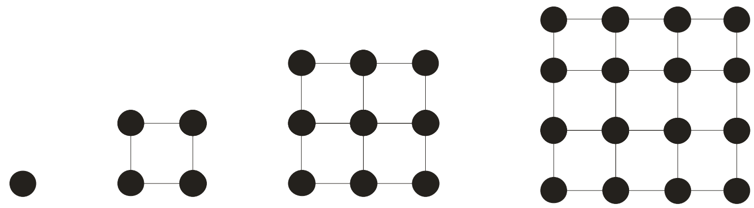
1 2 3 4

1a. dif.	**1**	**1**	**1**

Donde 2 - 1 = 1; 3 - 2 = 1; 4 - 3 = 1

12.2 Segunda diferencia

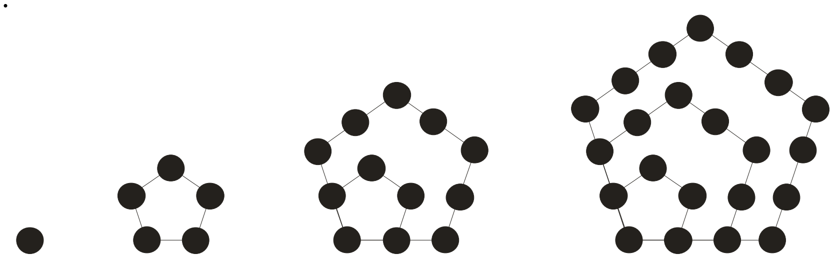
Resulta de la diferencia entre dos sucesivos números que corresponden a la primera diferencia en una misma familia de números figurados. En el caso de los números lineales es claro que la segunda diferencia es 0.
Ejemplo de segunda diferencia con números cuadrados:



	1		4		9		16
1a. dif.		3		5		7	
2a. dif.			**2**		**2**		

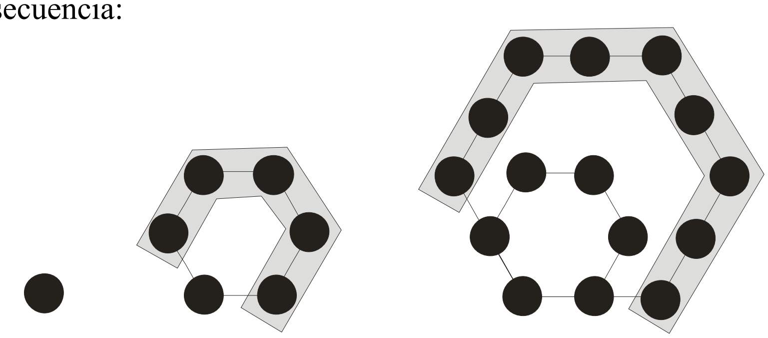
Donde 5 - 3 = 2; 7 - 5 = 2

Reconsideremos la propuesta del gnomon para la construcción de la familia de los números pentagonales:



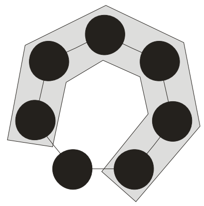
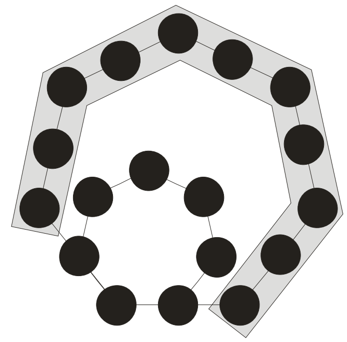
	1		5		12		22
1a. dif.		4		7		10	
2a. dif.			**3**		**3**		

Sobra decir que la tercera diferencia, para cualquier familia de números figurados es cero. Nótese que en las familias de números figurados analizadas (lineales, triangulares, cuadrados, pentagonales) la segunda diferencia es igual al número de segmentos de su gnomon. Estas regularidades llevan a abandonar el arreglo compacto como una característica común a los números figurados. De esta suerte los números hexagonales obedecerán la secuencia:



1 6 15

Donde podrá verificarse que la segunda diferencia es 4.

Los dos números heptagonales anteriores tienen el gnomon de 5 segmentos; estos resultados se agrupan en la tabla de la sección 13.

13 Relación entre sucesivos números figurados y entre familias

Hasta ahora hemos encontrado números lineales, triangulares, cuadrados, pentagonales. La siguiente tabla resume la información obtenida.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Lineales	**1**		**2**		**3**		**4**		**5**	
1a. diferencia		1		1		1		1		1
2a diferencia			0		0		0		0	
Triangulares	**1**		**3**		**6**		**10**		**15**	
1a. diferencia		2		3		4		5		6
2a. diferencia			1		1		1		1	
Cuadrados	**1**		**4**		**9**		**16**		**25**	
1a. diferencia		3		5		7		9		11
2a. diferencia			2		2		2		2	
Pentagonales	**1**		**5**		**12**		**22**		**35**	
1a. diferencia		4		7		10		13		16
2a. diferencia			3		3		3		3	
Hexagonales	**1**		**6**		**15**		**28**		**45**	
1a. diferencia		5		9		13		17		21
2a. diferencia			4		4		4		4	
Heptagonales	**1**		**7**		**18**		**34**		**55**	
1a. diferencia		6		11		16		21		26
2a.diferencia			5		5		5		5	
Octagonales	**1**		**8**		**21**		**40**		**65**	

Al acomodar los resultados en la tabla aparecen nuevas regularidades:

La columna C de negritas es una secuencia de números lineales.
La columna E de negritas tiene como primera diferencia 3 donde T_2=3.
La columna G de negritas tiene como primera diferencia 6 donde T_3=6.
La columna I de negritas tiene como primera diferencia 10 donde T_4=10.

13.1 Ejercicios para el maestro:

Usando las regularidades presentes en la tabla anterior:

1. Determine cuántas fichas se requieren para el sexto número octagonal. Arme ese número figurado.
2. Determine cuántas fichas se requieren para el quinto número nonagonal. Arme ese número figurado.
3. Determina cuántas fichas se requieren para el tercer número decagonal. Arme ese número figurado.
4.

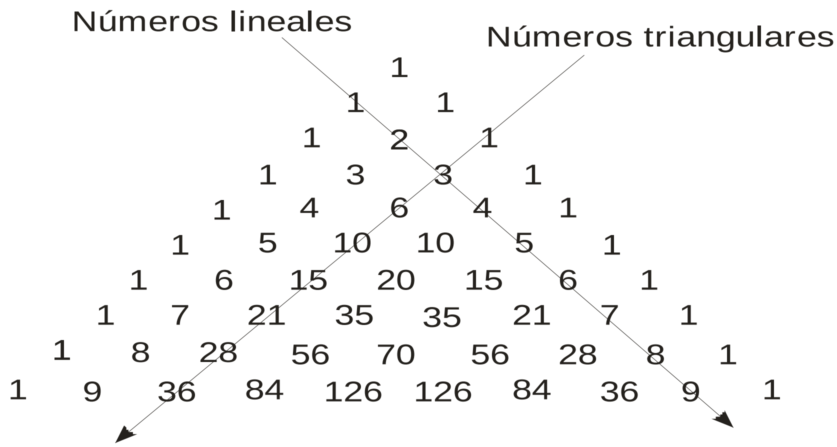
14 El triángulo de Pascal

La figura conocida como triángulo de Pascal es, en realidad, un arreglo ya conocido por los antiguos persas. Hacia el año 1100, Ibn Yahya al-Maghribi Al-Samawal, médico y algebrista, ya había desarrollado el teorema del binomio (atribuído a Newton). Al parecer, en forma independiente, los antiguos chinos llegaron a este triángulo, presentado a continuación:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

La construcción del triángulo de Pascal comienza en el vértice superior. Se escribe 1 en el comienzo y final de cada renglón. La cantidad de números en un renglón excede en 1 al renglón anterior. La suma de los números vecinos de un renglón genera al que va intercalado en el renglón siguiente. Así, el 2 del tercer renglón resulta de la suma de 1 + 1 del renglón. Los números 10 que aparecen en el sexto renglón resultan de 4 + 6, y de 6 + 4 del quinto renglón.

El triángulo de Pascal también aparece en teoría de probabilidades; pero es interesante anotar que incluye a algunas familias de números figurados. El siguiente diagrama muestra las sucesiones de números lineales y triangulares



Encuentre en el triángulo de Pascal una relación para formar los números cuadrados.

15 Combinación de familias de números figurados

Hemos observado que a cada tipo de números figurados corresponden números particulares y característicos. ¿Puede expresarse cualquier número en términos de números figurados combinando sus familias? Éste ha sido un problema que ha interesado a muchos matemáticos.

En 1638 Pierre de Fermat (1601-1665) afirmó que todo número es:

1. Triangular o la suma de un máximo de 3 triangulares.
2. Cuadrado o la suma de un máximo de 4 cuadrados.
3. Pentagonal o la suma de un máximo de 5 pentagonales.
4. Hexagonal o la suma de un máximo de 6 hexagonales.

Cualquier número (natural, se entiende) puede escribirse como suma de un máximo de tres números triangulares, como suma de un máximo de cuatro cuadrados, como suma de un máximo de cinco pentagonales, etcétera.

En 1772, José Luis Lagrange (1736-1813) demostró la afirmación de Fermat para cuadrados y, en 1796 Carlos Federico Gauss (1777-1855) la demostró para números triangulares.

El enunciado general de Fermat fue demostrado en 1813 por Agustín Luis Cauchy (1789-1857).

15.1 Ejercicios para el maestro

Los siguientes ejercicios están basados en las conjeturas de Fermat de los números figurados:

1. Arme el número 25 (cuadrado) sin usar más de cuatro números cuadrados.
2. Arme el número 21 (triangular) sin usar más de tres números triangulares.
3. Arme el número 35 (pentagonal) sin usar más de 5 números pentagonales.
4. Arme el número 25 sin usar más de 5 números pentagonales.
5. Arme el número 25 sin usar más de 3 números triangulares.
6. Arme el número 25 sin usar más de 4 números cuadrados.
7. Arme el número 21 sin usar más de 5 números pentagonales
8. Arme el número 21 sin usar más de 4 números cuadrados.
9. Arme el número 21 sin usar más de 3 números triangulares.

16 Conclusiones y recomendaciones didácticas

El desarrollo del pensamiento no se produce en forma automática por recepción de contenidos o instrucciones. Resulta, más bien, del trabajo del sujeto por construir nuevas estructuras y significados. En ese trabajo la experiencia del sujeto, sus actividades manuales y mentales son primordiales. Ello significa tanteos y errores y, sobre todo que *no todos los errores* son inútiles y perjudiciales. Algunos son pasos indispensables para el aprendizaje, éstos son los que el maestro debe valorar y aprovechar.

Una vez que el maestro ha resuelto los ejercicios encontrará que es relativamente fácil adaptarlos a los estudiantes.

Por otro lado, en la historia de la ciencia hay un fenómeno frecuente: la incapacidad de anticipar la utilidad de algunos conceptos e instrumentos. Cuando Michel Faraday inventó su primer motor eléctrico fue cuestionado acremente "¿Para qué sirve?". Faraday sólo argumentó "¿Para qué sirve un bebé?"

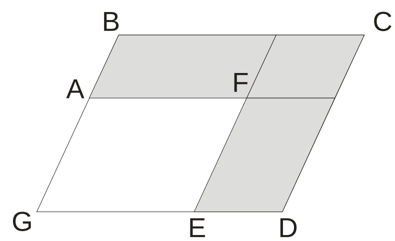
Los números figurados que hemos expuesto comenzaron, sí, como un divertimento intelectual, pero hoy está claro su poder para obtener los volúmenes de una pirámide, cono y esfera.

Depende del maestro el poder extraer también su potencial didáctico.

17 Anotaciones etimológicas

Armonía del griego *harmonía* "concordancia, unión proporcionada"
Cosmos del griego *kosmos* "orden, belleza". Del mismo origen: cosmético.
Dividir del latín *dividere* "partir, separar en grupos". Del mismo origen: viuda.
Par es de origen latino, significa "igual, semejante". Del mismo origen: pareja, comparar, parejo.
Non proviene del español antiguo "non par".
Figura significa "forma". Aparece también en: efigie, figurar, ficticio.
Cuadrado significa "cosa de cuatro lados", del latín vulgar *quattro.* Del mismo origen: cartabón, cuaderno, cuadrúpedo, escuadra.

Cálculo proviene de *calx* piedra y el sufijo *cullum* que significa “pequeño”. El sufijo aparece en: montículo (pequeño monte), partícula (pequeña parte), corpúsculo (pequeño cuerpo), vesícula (pequeño vaso). Etimológicamente, cálculo, es “piedrecita”.
Cociente resulta del latín *quotiens* “cuántas veces”.
Gnomon proviene del griego *gnomon* “intérprete”. Se usaba el término lo mismo para la aguja de un reloj de sol que para una escuadra de carpintero. En geometría representaba a la región de un paralelogramo resultante de la eliminación de un paralelogramo semejante en una esquina. En la siguiente figura ABCDEF es el gnomon del paralelogramo AFEG.



Bibliografía

Bromberg, S. (1991). *Aritmética para ver*. Contactos 4, 13-17.
Clawson, C. (1999). *Misterios matemáticos.* Editorial Diana, México.
Córdova, J.L. (2002). *Volumen de una pirámide a partir de números figurados*. Contactos, 46.
Damasio, A. (2001). *El error de Descartes.* Crítica, Barcelona.
Galicia, R (1988). *Los numeros figurados en la aritmética griega*. Contactos, Vol. III, No. 4, oct.-dic.
García, J.A. (1998). *Números poligonales*. Educación Matemática, Vol. 10, No. 3, Diciembre.
Gómez S. G. (1988) *Breve diccionario etimológico.* Fondo de Cultura Económica.
Heath, T. (1981). *A History of Greek Mathematics from Thales to Euclid.* Dover, New York.
Heisenberg, W. (198). El Humanismo en la filosofía de la ciencia. UNAM. Seminario de problemas científicos y filosóficos. III/4.
Holton, G. (1998). *Einstein, historia y otras pasiones.* Taurus, Madrid.
Huntley, H. E. (1970). *The divine proportion*. Dover Publications, Inc.
Lawlor, R. (1990). *Sacred Geometry.* Thames and Hudson Ltd. London.
Moorehouse, A. C. (1995). *Historia del alfabeto.* F.C.E. México.
Olson, D. R. (1998). *El impacto de la escritura y la lectura en la estructura del conocimiento.* Gedisa.
Resnikoff, H. L.(1984). *Mathematics in Civilization.* Dover Publications Inc. New York.
Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Paidós, España.
Zaslavsky, C. (1992). *Los primeros matemáticos fueron mujeres*. Educación Matemática, Vol. 4, No. 3.

Acerca de los autores

Adela Guerrero Reyes

Es Profesora normalista egresada de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros, Licenciada en Psicología de la UNAM, Maestra en Psicología por la Escuela de Altos Estudios en Ciencias Sociales de Francia y Doctora en Pedagogía por la UNAM. A lo largo de toda su carrera profesional ha colaborado con la SEP en diversas responsabilidades y cargos, todos ellos relacionados con la educación básica, a saber: propuesta de planes y programas de estudio, elaboración de libros de texto gratuitos y desarrollo profesional del magisterio, sin dejar de mencionar, la docencia en los niveles de educación primaria, normal y superior. Asimismo, cuenta con diversas publicaciones en revistas educativas relacionadas tanto con el diseño curricular como con la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria.

Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez

Es Licenciada en Ciencias Físico Matemáticas por la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, tiene el grado de Maestra en Ciencias con especialidad en Matemática educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav). Dentro de sus actividades profesionales destaca el hecho de ser profesora investigadora en el Departamento de Investigaciones Educativas (DIE-Cinvestav). Ha impartido numerosos cursos y talleres de actualización a docentes y publicado numerosos artículos sobre investigación educativa e innovación didáctica en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, ha participado en proyectos de desarrollo curricular de impacto nacional como Dialogar y descubrir del Consejo Nacional de Fomento Educativo (Conafe) y en la elaboración de los Libros de Texto Gratuitos de Matemáticas de 1º, 2º, 5º y 6º grados, de los cuales es coautora.

Silvia García Peña

Profesora normalista egresada de la BENM, Maestra de Matemáticas de la Escuela Normal Superior de México, con Maestrías en Educación campo Educación Matemática de la UPN y en Matemática Educativa del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Ha sido docente en los niveles de educación primaria, secundaria y bachillerato. Asimismo, dentro de su experiencia laboral destaca su participación en cursos y talleres de actualización para profesores de educación primaria; y el ser asesora de Exámenes Nacionales (ProNap). Cuenta con diversas publicaciones de libros y materiales dirigidos a maestros y alumnos, elaborados por editoriales privadas y por la SEP, dentro de éstos últimos destacan: Fichero de Actividades Didácticas. Matemáticas. Secundaria (coautora); Libro para el Maestro. Matemáticas. 5º (coautora) y 6º (colaboradora) grados.

Fortino Escareño Soberanes

Profesor de Educación Primaria egresado de la Normal de Sinaloa, Profesor de Matemáticas de la Escuela Normal Superior de México, Maestro en Ciencias y Candidato a Doctor en Educación Matemática del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Tiene, además una amplia experiencia como profesor de primaria y secundaria. Cuenta con diversas publicaciones de libros y artículos dirigidos a maestros, entre los que destacan: Dos por tres, serie de libros de texto para los seis grados de educación primaria (coautor); Matemáticas por objetivos, serie de libros para los tres grados de educación secundaria (coautor) y Matemáticas. Enfoque de resolución de problemas, serie de libros de texto para los tres grados de educación secundaria.

José Luis Córdova Frunz

Licenciado en Ingeniería Química de la Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas del IPN, Maestro en Ciencias del DIE-Cinvestav y, Doctor en Educación Matemática del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Profesor de la Universidad Autónoma Metropolita (Unidad Iztapalapa). Ha participado en diversas actividades que relacionan la química con otras disciplinas, tales como: arqueología, música e instrumentos musicales. Es director de la revista educación de ciencias básicas e ingeniería “Contactos”. Ha impartido diversos cursos y talleres acerca de métodos de estudio, química recreativa y relaciones de ésta con otras ciencias. Asimismo, ha publicado cerca de 30 artículos con temas relacionados con la educación.

El Proyecto "Centro de Altos Estudios e Investigación Pedagógica" tiene como objetivo el de incorporar maestros de escuelas públicas a la investigación educativa, para generar información y nuevos conocimientos útiles para la toma de decisiones y el diseño de políticas y acciones educativas.

Además, el Centro promueve la autoría de expertos, en series como ésta, orientada al magisterio de educación básica. Esta obra, es una de siete que forman la serie "Aprender a enseñar..."

Otra serie editada por el Centro y Editorial Santillana, se derivó de la investigación de 2005, y está formada por los títulos siguientes: Prácticas de la evaluación en las escuelas primarias de Nuevo León; La investigación educativa en Nuevo León; La formación de valores en las escuelas primarias de Nuevo León; El Programa Enciclomedia en las escuelas primarias de Nuevo León; Veinte experiencias educativas exitosas en el mundo; Magisterio: Punto de encuentro; y La educación en la prensa de Nuevo León. Los prólogos de esta serie, fueron preparados bondadosamente por: Margarita Zorrilla Fierro, Eduardo Weiss, María Teresa Yurén Camarena, Felipe Bracho Carpizo, Frida Díaz Barriga Arceo, José Ángel Pescador Osuna, y Fidel Chávez Pérez. Completan la serie de productos del Centro en 2005, el Catálogo de Tesis de posgrado de la Unidad UPN 19 A Monterrey "Mejores Directores". Se cuenta con la versión en CD de todos estos productos.